

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Alois Strnad

Poznámka o čtyřstěnu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 2, 146--147

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/109282>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1900

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Poznámka o čtyřstěnu.

Napsal

Alois Strnad,

ředitel c. k. realky v Kutné Hoře.

Jsou-li A, B, C, D ploské obsahy stěn čtyřstěnu $abcd$,
a jsou-li stěnové úhly

$$(BC) = \alpha, (CA) = \beta, (AB) = \gamma,$$

jest

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2BC \cos \alpha - 2CA \cos \beta - 2AB \cos \gamma.$$

Tuto větu, která jest stereometrickou obdobou cosinové věty o trojúhelníku rovinném, lze vyvoditi takto:

Označme délky hran

$$\overline{da} = a, \quad \overline{db} = b, \quad \overline{dc} = c$$

a úhly jimi sevřené

$$\sphericalangle bdc = \alpha_1, \quad \sphericalangle cda = \beta_1, \quad \sphericalangle adb = \gamma_1;$$

mimo to budiž

$$\overline{bc} = a_1, \quad \overline{ca} = b_1, \quad \overline{ab} = c_1.$$

Potom jest

$$a_1^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha_1$$

$$b_1^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta_1$$

$$c_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma_1$$

a obsah stěny abc jest

$$D = \frac{1}{4} \sqrt{(a_1 + b_1 + c_1)(a_1 + b_1 - c_1)(b_1 + c_1 - a_1)(c_1 + a_1 - b_1)};$$

lze také psáti:

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{1}{16} [(a_1 + b_1)^2 - c_1^2] [c_1^2 - (a_1 - b_1)^2] \\ &= \frac{1}{16} [4a_1^2 b_1^2 - (a_1^2 + b_1^2 - c_1^2)^2]. \end{aligned}$$

Dle vzorců hořejších jest však

$$\begin{aligned} a_1^2 b_1^2 &= c^4 - 2c^3 (b \cos \alpha_1 + a \cos \beta_1) \\ &\quad + c^2 (a^2 + b^2 + 4ab \cos \alpha_1 \cos \beta_1) \\ &\quad - 2abc (a \cos \alpha_1 + b \cos \beta_1) + a^2 b^2, \\ a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 &= 2 (c^2 - bc \cos \alpha_1 - ca \cos \beta_1 + ab \cos \gamma_1). \end{aligned}$$

Užijeme-li těchto hodnot, nabude výraz pro D podoby

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{1}{4} [b^2 c^2 \sin^2 \alpha_1 + c^2 a^2 \sin^2 \beta_1 + a^2 b^2 \sin^2 \gamma_1 \\ &\quad - 2a^2 bc (\cos \alpha_1 - \cos \beta_1 \cos \gamma_1) \\ &\quad - 2ab^2 c (\cos \beta_1 - \cos \gamma_1 \cos \alpha_1) \\ &\quad - 2abc^2 (\cos \gamma_1 - \cos \alpha_1 \cos \beta_1)]. \end{aligned}$$

Mějme však na zřeteli následující relace známé z trigonometrie rovinné a sférické:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} bc \sin \alpha_1, \quad B = \frac{1}{2} ca \sin \beta_1, \quad C = \frac{1}{2} ab \sin \gamma_1, \\ \cos \alpha_1 - \cos \beta_1 \cos \gamma_1 &= \sin \beta_1 \sin \gamma_1 \cos \alpha, \\ \cos \beta_1 - \cos \gamma_1 \cos \alpha_1 &= \sin \gamma_1 \sin \alpha_1 \cos \beta, \\ \cos \gamma_1 - \cos \alpha_1 \cos \beta_1 &= \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \cos \gamma; \end{aligned}$$

dle těchto shledáváme, že jest

$$\begin{aligned} a^2 bc (\cos \alpha_1 - \cos \beta_1 \cos \gamma_1) &= ac \sin \beta_1 \cdot ab \sin \gamma_1 \cdot \cos \alpha = 4 BC \cos \alpha, \\ ab^2 c (\cos \beta_1 - \cos \gamma_1 \cos \alpha_1) &= ba \sin \gamma_1 \cdot bc \sin \alpha_1 \cdot \cos \beta = 4 CA \cos \beta, \\ abc^2 (\cos \gamma_1 - \cos \alpha_1 \cos \beta_1) &= cb \sin \alpha_1 \cdot ca \sin \beta_1 \cdot \cos \gamma = 4 AB \cos \gamma \end{aligned}$$

a tudíž, jak svrchu vysloveno,

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2BC \cos \alpha - 2CA \cos \beta - 2AB \cos \gamma.$$
