Vincenc Strouhal

Váhy a vážení. [I].

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 4, 232--256

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109415`

$$\mathrm{D}\,\mathrm{arc\,tg}\,x = \frac{1}{1+x^2}, \tag{30}$$

nepřikládáme tomuto *přímému* způsobu odvozovacímu tolik důležitosti praktické, abychom chtěli jím nahraditi obvyklý způsob na obrácení závislosti založený. Třebať tu praemiss, nejsoucích tak na snadě, jako jest základ methody dosud užívané. Nicméně prospěšno s hlediska theoretického, možná-li se vyhnouti *nepřímým* methodám odvozovacím vůbec. Jak rychle se přijde tu neb onde k hledanému výsledku, o tom rozhoduje obsažnost těch kterých praemiss, při čemž arci jest snaha badatelova, aby *minimem logické práce dosáhl maxima logického úspěchu.*

Váhy a vážení.*)

Napsal

Dr. Vincenc Strouhal,
professor české university v Praze.

§ 1. Úvahy základní.

Rovnováha na jednotlivých strojích vede k podmínce, kterouž lze vždy vyjádřiti rovnicí tvaru

$$P : Q = b : a.$$

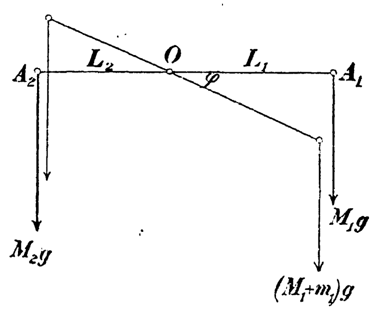
V rovnici této jest poměr dvou sil určen poměrem dvou délek. Lze-li délky tyto měřiti, jest dána možnost, rovnovahou samou zkoumati, po případě číselně stanoviti poměr dvou sil původu jakéhokoliv, a je-li jedna z obou známa, druhou určiti.

Má-li se určování toto díti se žádoucí přesností, musí stroj býti povahy takové, aby i nejmenší pozměnění poměru silového, pro který rovnováha platí, ihned způsobem očividným se ukázalo, aby tedy ihned nastal pohyb, ale nikoli pohyb bez ustání, stále se urychlující, jako by tomu bylo na př. u kladek neb kladkostrojů, nýbrž jen pohyb do nové rovnovážné polohy. To

*) Ukázka z „Mechaniky". (Sborníku Jednoty českých mathematiků čís. IV.)

pak vyžaduje především, aby překážky tohoto pohybu, jak o nich u strojů bylo jednáno, byly sníženy na míru nejskrovnější a pak, aby stroj změnou rovnovážné polohy novým poměrům vyhověl. Podmínkám těmto může dokonale vyhověti páka.

V oddílu, kterýž začínáme, jedná se o síly určitého původu, totiž o váhu jistých hmot. Značí-li M jakoukoli z hmot těch, g intensitu gravitačního pole zemského, jest Mg váha této hmoty, působící směrem svislým. Srovnávání sil Mg na místě, kde gravitační intensita jest jakákoli, ale konstantní, znamená pak srovnávání hmot; a právě toto srovnávání jest účelem vážení.



Obr. 1.

Budiž přímka A_2OA_1 (obr. 1.) pákou mathematickou, otáčivou kolem bodu O, na kteréž v bodech A_1 a A_2 působí ve vertikální rovině nákresné směrem svislým váhy M_1g a M_2g hmot M_1 a M_2. Je-li páka v poloze vodorovné, jsou $OA_1 = L_1$ $OA_2 = L_2$ její ramena; i jest rovnováha podmíněna rovností momentů

$$M_1g \,.\, L_1 = M_2g \,.\, L_2.$$

Je-li této podmínce vyhověno, zůstane páka v rovnováze také v každé jiné poloze než vodorovné; když se na př. ve svislé rovině nákresné otočí o úhel φ, platí též rovnost momentů

$$M_1g \,.\, L_1 \cos\varphi = M_2g \,.\, L_2 \cos\varphi,$$

poněvadž se ramena L na obou stranách zkrátí touže měrou.

Kdyby se pak ke hmotě na př. M_1 přidala malá hmota m_1, přibyl by na pravo moment

$$m_1 g \,.\, L_1 \cos \varphi,$$

proti němuž na levo není žádného momentu opačného; vznikl by tedy účinkem onoho nového momentu pohyb do nové rovnovážné polohy, jež by konečně nastala při

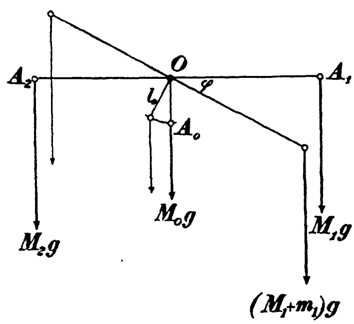
$$m_1 g \,.\, L_1 \cos \varphi = 0,$$

t. j. při

$$\varphi = 90^0$$

páka postavila by se vertikalně.

Jako ona páka mathematická chovala by se také páka fysická, kteráž by těžiště své měla v ose O, t. j. kteráž by byla v poloze indifferentní.



Obr. 2.

Zcela jinak měla by se však věc u páky fysické, jež by sama o sobě měla polohu stabilní.

Budiž dána (obr. 2.) páka fysická, A_0 budiž její těžiště svisle pod osou O v odlehlosti $OA_0 = l_0$, působiště A_1 a A_2 buďtež s bodem O umístěna na téže přímce a to tak, že v rovnovážné poloze páky, kdy přímka OA_0 se stává vertikalní, ona přímka A_2OA_1 jest horizontalní. V těžišti můžeme si hmotu M_0 celé páky fysické mysliti soustředěnu; zde působí váha její $M_0 g$ vertikalně. Ve vodorovné poloze páky ruší se váha tato pevností osy.

Budiž opět splněna podmínka

$$M_1 g . L_1 = M_2 g . L_2$$

pro polohu páky vodorovnou. Kdyby se páka otočila o úhel φ, platila by opět rovnost

$$M_1 g . L_1 \cos\varphi = M_2 g . L_2 \cos\varphi,$$

ale zároveň by přibyl moment

$$M_0 g . l_0 \sin\varphi,$$

proti němuž není nikde momentu opačného. Vznikl by tudíž zpětný pohyb do polohy rovnovážné, jež by nastala při

$$M_0 g . l_0 \sin\varphi = 0,$$

t. j. při

$$\varphi = 0.$$

Působením vlastní váhy vrací se tudíž páka zatížená do své původní polohy vodorovné, tak jako když jest nezatížená.

Kdyby se pak opět ke hmotě na př. M_1 přidala malá hmota m_1, přibyl by na pravo moment

$$m_1 g . L_1 \cos\varphi,$$

proti němu by však na levo vahou páky samé působil moment opačný

$$M_0 g . l_0 \sin\varphi.$$

Spolupůsobením obou momentů nastal by tudíž pohyb do nové polohy rovnovážné, jež jest určena podmínkou

$$M_0 g . l_0 \sin\varphi = m_1 g . L_1 \cos\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m_1 L_1}{M_0 l_0}.$$

V rovnicích odvozených jest obsažen princip vážení. Rovnovahou na páce lze stanoviti poměr vah a tím i poměr hmot těles daných; a je-li páka rovnoramennou, t. j. je-li $L_1 = L_2$, lze ihned rozhodnouti z rovnováhy samé, jsou-li dvě hmoty M_1 a M_2 stejny čili nic. Určování takovéto zoveme vážením; ona páka zove se vahadlem, a celý přístroj, pro vážení zvláště vhodně sestrojený, vahami. Ze hmot srovnávaných jest z pravidla jedna, na př. M_1 známou a jest dána řadou hmot dle jednotky grammu upravených, t. j. závažím. Vážením pak stanovíme, že těleso M_2 váží tolik jako jistý počet M_1 jednotek grammových; jest tudíž číslo nalezené nikoli vahou, nýbrž hmotou tělesa M_2.

§ 2. Citlivost vážení.

Má-li toto srovnávání hmot dle jich váhy se díti se žádoucí citlivostí, musí sebe menší porušení správného poměru působících sil způsobené na př. přívažkem m_1 se jeviti patrně značnou odchylkou φ vahadla z polohy vodorovné. O velikosti této odchylky poučuje rovnice

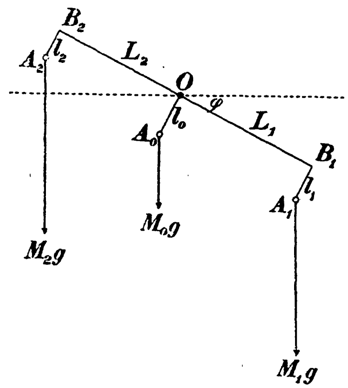
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m_1 L_1}{M_0 l_0}.$$

Jest tudíž citlivost vah, měřená tangentou úhlu φ, tolikrát větší, kolikrát jest větší přívažek m_1 a rameno L_1 a kolikrát jest menší hmota M_0 vahadla a odlehlost l_0 jeho těžiště od osy. Nezávislá jest však citlivost na zatížení vahadla vahou srovnávaných hmot M_1 a M_2.

Výsledky tyto o citlivosti vážení můžeme za orientační pokládati; vskutku orientují v hlavní věci, oč zde jde. Avšak definitivními nejsou, ježto se zakládají na podmínce, kteráž ve skutečnosti nebývá, ba ani nemůže býti splněna.

Předpokládali jsme (obr. 2.), že body A_1 a A_2 leží s bodem O na téže přímce, kteráž jest vodorovnou, když jest vahadlo samo v poloze rovnovážné, t. j. když jeho těžiště A_0 jest svisle pod bodem O. Dlužno ovšem vytknouti, že praxis se snaží co možná tento případ realisovati; avšak jest třeba též vyšetřiti, jak by se poměry změnily, kdyby body A_1 a A_2 padly buď nad nebo pod přímku vedenou bodem O kolmo na OA_0. Neboť jednak může se státi, že by skutečné provedení vahadla zůstalo za onou snahou, jednak i kdyby skutečně provedení bylo bezvadné, může se státi, že by vahadlo, následkem své pružnosti, zatížením samým se poněkud prohnulo — což ovšem by smělo býti jen dočasně, v mezích pružnosti, — čímž by body A_1 a A_2

se snížily. Nutno tudíž vzhledem k těmto důvodům za vahadlo schematické pokládati vahadlo $A_2B_2OB_1A_1$ (obr. 3.).



Obr. 3.

Zaveďme obdobné označení:

$$OB_2 = L_2 \qquad OB_1 = L_1$$
$$B_2A_2 = l_2 \qquad B_1A_1 = l_1$$
$$OA_0 = l_0.$$

V poloze rovnovážné budiž, jako dříve,

$$M_1g \,.\, L_1 = M_2g \,.\, L_2.$$

Připojme opět na pravo přívažek m_1. Vahadlo se skloní o úhel φ účinkem momentu tohoto přívažku. Sestavíme-li veškeré momenty v jednom i druhém smyslu působící, obdržíme pro rovnováhu rovnici následující

$$(M_1 + m_1)g\,(L_1 \cos\varphi - l_1 \sin\varphi)$$
$$= M_2g\,(L_2 \cos\varphi + l_2 \sin\varphi) + M_0 g l_0 \sin\varphi$$

čili vzhledem k rovnici předešlé

$$m_1 g\, L_1 \cos\varphi - (M_1 + m_1)\, g\, l_1 \sin\varphi = M_2 g\, l_2 \sin\varphi + M_0 g\, l_0 \sin\varphi.$$

V rovnici této můžeme malý additivní přívažek m_1 proti velké hmotě M_1 opomenouti. Upravíce pak obdržíme

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{m_1 L_1}{M_0 l_0 + M_1 l_1 + M_2 l_2}.$$

Urychlení g odpadne; na místě momentů silových nastupují momenty hmotné.

Definitivní rovnici tuto pro citlivost lze snadno pamatovati a vyložiti. Odchýlená poloha, úhlem φ stanovená, jest jakousi střední mezi polohou vahadla horizontalní a vertikalní. V poloze horizontalní působí jen přívažek m_1 momentem $m_1 L_1$ V poloze vertikalní působí ve smyslu opačném

hmoty	M_0,	M_1,	M_2
na rameni	l_0,	l_1,	l_2
momenty	$M_0 l_0$,	$M_1 l_1$,	$M_2 l_2$.

V šikmé poloze vahadla se umenšují momenty

$$m_1 L_1 \quad \text{na} \quad m_1 L_1 \cos\varphi,$$
$$M_0 l_0 + M_1 l_1 + M_2 l_2 \quad \text{na} \quad (M_0 l_0 + M_1 l_1 + M_2 l_2) \sin\varphi,$$

až se vyrovnají; odtud pak rovnice pro tg φ.

Přehledně obdržíme, zavedouce symbol summační,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m_1 L_1}{\Sigma M l}$$

a ovšem analogicky

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m_2 L_2}{\Sigma M l},$$

kdyby se přídavek m_2 dal na stranu levou.

Odvodili jsme rovnici pro citlivost vah vycházejíce od vahadla jakožto páky nerovnoramenné, poněvadž všeobecnější případ tento není nikterak složitějším než obvyklý případ vahadla jakožto páky rovnoramenné. Předpokládáme-li, že jest $L_1 = L_2$, tudíž pak také $M_1 = M_2$, $l_1 = l_2$, obdržíme, vynechávajíce indexy, jichž pak k rozeznávání pravé a levé strany vahadla není potřebí, na místě všeobecné rovnice tuto zvláštní:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{mL}{M_0 l_0 + 2Ml},$$

ve kteréž však souměrnost výrazu ve jmenovateli jest zastřena.

§ 3. Doba kyvu vah.

Jak později seznáme, děje se vážení k přesným účelům vědeckým methodou zvláštní, totiž pozorováním kyvů vah. Jest tudíž též důležito přihlédnouti, s čím doba kyvů vah souvisí, tím spíše, poněvadž veličina tato jest v těsném spojení s citlivostí.

Váhy jsou kyvadlo fysické. Doba t kyvu takového kyvadla jest stanovena vzorcem

$$t = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}},$$

kdež jest λ redukovaná délka kyvadla. Tato jest pak určena poměrem, v jakém jsou momenty hmotné stupně druhého k momentům hmotným stupně prvého.

Moment hmotný druhého stupně jest moment setrvačnosti; závisí jednak na vahadle samém, jednak na jeho zatížení.

Je-li L_0 poloměr setrvačnosti vahadla samého, jest jeho moment setrvačnosti dán výrazem

$$M_0 L_0^2.$$

K tomuto přistupuje moment setrvačnosti zatěžujících hmot M_1 a M_2. Vzhledem k tomu, že závěs hmot zatěžujících jest volně pohyblivý kolem závěsných bodů (resp. přímek), můžeme si ony hmoty mysliti jako by soustředěny v bodech A_1 a A_2 ve vzdálenostech

$$\sqrt{L_1^2 + l_1^2} \text{ a } \sqrt{L_2^2 + l_2^2}$$

od osy O, místo nichž lze vždy psáti L_1 a L_2, poněvadž délky l_1 a l_2 jsou proti oněm zcela nepatrné. Momenty setrvačnosti hmot zatěžujících jsou tedy

$$M_1 L_1^2 \text{ a } M_2 L_2^2.$$

Úhrnný moment hmotný druhého stupně jest tudíž

$$M_0 L_0^2 + M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2.$$

Moment stupně prvého jest týž, který způsobuje stabilitu hmoty kývající, totiž

$$M_0 l_0 + M_1 l_1 + M_2 l_2.$$

Z toho plyne délka redukovaná

$$\lambda = \frac{M_0 L_0^2 + M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2}{M_0 l_0 + M_1 l_1 + M_2 l_2}$$

čili přehledněji

$$\lambda = \frac{\Sigma M L^2}{\Sigma M l}$$

všeobecně pro kyvadlo jakožto páku nerovnoramennou.

Ve zvláštním případu, je-li $L_1 = L_2$, $M_1 = M_2$, $l_1 = l_2$, obdržíme, vynechávajíce indexy, jichž pak k rozeznávání pravé a levé strany vahadla není potřebí,

$$\lambda = \frac{M_0 L_0^2 + 2ML^2}{M_0 l_0 + 2Ml}.$$

§ 4. Rozbor rovnice o citlivosti vah a době kyvu.

Přestaňme zde na případu obyčejnějším, kdy vahadlo jest pákou rovnoramennou. Pak tedy platí rovnice

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{mL}{M_0 l_0 + 2Ml}$$

$$\lambda = \frac{M_0 L_0^2 + 2ML^2}{M_0 l_0 + 2Ml}.$$

Rozeznávejme dva hlavní případy:

1. l_0 a l mají znamení souhlasná,
2. l_0 a l mají znamení opačná.

Případ 1. jest jednoduchý. Fysikalní smysl má zde jen positivní znamení. Citlivosti $\operatorname{tg} \varphi$ ubývá se zatížením. Naproti tomu délky redukované λ může buď též ubývati se zatížením nebo přibývati, nebo může zůstávati konstantní. To vynikne lépe z rovnice poslední, když ji píšeme ve tvaru tomto:

$$\lambda = \frac{M_0 + 2M\dfrac{L^2}{L_0^2}}{M_0 + 2M\dfrac{l}{l_0}} \cdot \frac{L_0^2}{l_0}.$$

Je-li tedy

$$\frac{l}{l_0} = \frac{L^2}{L_0^2},$$

vychází nezávisle na zatížení

$$\lambda = \frac{L_0^2}{l_0}.$$

Dle toho pak, je-li

$$\frac{l}{l_0} < \frac{L^2}{L_0^2} \text{ anebo } \frac{l}{l_0} > \frac{L^2}{L_0^2},$$

stoupá nebo klesá λ se zatížením; zároveň jest

$$\lambda > \frac{L_0^2}{l_0} \text{ anebo } \lambda < \frac{L_0^2}{l_0}.$$

Případ 2. jest charakterisován tím, že zde může jak citlivost $tg\varphi$ tak redukovaná délka λ býti $= \infty$, totiž tehdá. kdy

$$\pm M_0 l_0 \mp 2Ml = 0$$

čili

$$2M = M_0 \frac{l_0}{l}.$$

Tím jest stanoveno jisté mezní zatížení vah.

Je-li l_0 positivní a l negativní, stoupá citlivost i doba kyvu se zatížením až do mezního zatížení, kdy pak vah nelze dále potřebovati. Je-li l_0 negativní a l positivní, nelze z počátku vah potřebovati než až zatížení dostoupí oné mezní hodnoty, od které pak při dále stoupajícím zatížení citlivosti i doby kyvu se zatížením od hodnoty nekonečné ubývá.

Mezní zatížení má dle toho dvojí význam. Značí zatížení, buď do kterého (končíc) anebo od kterého (počínajíc) lze vah užívati.

Při tomto rozboru předpokládali jsme, že odlehlosti l_0 a l zůstávají při stoupajícím zatížení M vah konstantními. Při l_0 jest podmínce této vyhověno měrou dostatečnou — je-li nějaká změna, bývá v případech, jak ve skutečnosti jsou, velice nepatrná. Jinak je tomu však při l. Pružností může se vahadlo poněkud při rostoucím zatížení dočasně prohnouti. Tím se může značně modifikovati případ 2., je-li l z počátku negativní. Stoupá-li zatížení, začíná se toto negativní l znenáhla (absolutně) umenšovati, stává se $= 0$ a pak nabývá hodnoty positivní. Tím citlivost z počátku vzrůstá, ale vždy méně a méně, pak stává se téměř konstantní

$$tg\,\varphi = \frac{m\mathrm{L}}{\mathrm{M}_0 l_0}$$

a pak dále zase klesá. Případ tento, kterýž pro praxis vážení není nevýhodný, poněvadž citlivost pro jisté střední zatížení jest konstantní, v skutku se vyskytuje.

Z krátkého tohoto rozboru jest patrno, že otázka citlivosti vah a s ní související otázka doby kyvu nejsou zcela tak jednoduché, jak v úvahách orientačních bylo řečeno. Zejména není správné, že by váhy stávaly se nepotřebnými, kdyby vahadlo samé mělo polohu labilní; účinkem positivního l a přiměřeného stálého zatížení, jakéž jest dáno miskami vah, bylo by lze také takových vah dobře potřebovati.

K úplnému porozumění výkladů těchto jest nezbytno, míti číselné představy o tom, jakého řádu jsou veličiny zde rozhodující, zejména odlehlosti l_0 a l. Proto jest ke konci celého oddílu tohoto uveden příklad na základech konkretních propočítaný, který tuto otázku objasňuje. K orientaci budiž zde povšechně poznamenáno, že u jemných vah analytických odlehlost l_0 těžiště jde as do desetin, odlehlosti l pak asi do setin millimetru. Že pak mizí čtverec l^2 proti čtverci L^2 celé na decimetry čítající délky L ramena vahadlového, jest ihned patrno, jakož i ne méně, že prohnutí vahadla v mezích pružnosti jest číselně téhož řádu, jako odlehlosti l samé.

§ 5. Zařízení vahadla.

Z theoretických úvah dosavadních lze dobře posouditi, jak třeba vypracovati vahadlo jakožto nejdůležitější část vah, aby bylo vyhověno všem požadavkům přesného vážení.

U vah sestrojených k účelům vědeckým jest vahadlo pákou rovnoramennou. Aby otáčejíc se zůstávalo v téže rovině (vertikální), otáčí se kolem osy, dané hranou trojbokého hranolu ve vahadle blízko u těžiště A_0 upevněného, tak že těžiště zůstává pod osou v malé vzdálenosti, kterou lze dodatečně ještě poněkud měniti.

Vahadlo má podélnou rovinu souměrnosti; střední hranol jest do vahadla tak zasazen, aby jeho hrana, tvořící osu, byla k oné rovině kolmo. Tato rovina jest totožná s rovinou nákresnou při dřívějších úvahách theoretických. V ní leží těžiště A_0 vahadla a osa se do ní promítá bodem O. Působiště sil nejsou body, nýbrž rovněž hrany trojbokých hranolů zasazených do vahadla tak, aby jich hrany k oné rovině souměrnosti byly kolmo, tudíž s hranou středního hranolu rovnoběžnými. Šroubky se jich poloha dá dodatečně jemně korrigovati. Je-li vahadlo ve své poloze rovnovážné, mají hrany postranních hranolů býti v rovině vodorovné, v níž leží též osa vahadla; není však závadou, jde-li rovina tato o malou délku l pod osu neb nad osu, raději nad osu, jak patrno z úvah dřívějších, zvláště u vahadla jemně pracovaného, kteréž se větším zatížením spíše dočasně prohýbá.

Jinak žádá se, aby vahadlo bylo dlouhé a lehké. Obě podmínky jsou patrně v odporu: vahadlo delší jest povšechně těžší. Přijde tudíž na to, má-li se větší důraz položiti na délku neb na lehkost vahadla. Vahadlo dlouhé kývá velmi volně; účinek členu $2ML^2$ na dobu kyvu převládá. Poněvadž se pak při vážení tyto kyvy pozorují, jest jasno, že velmi volné kývání jest postupu práce na újmu. Proto jest rozumnější, klásti důraz na lehkost vahadla, pracovati je tudíž velmi jemně a užiti materialu lehkého, tedy na př. aluminia, když se z důvodů jiných neužije mosazi. Avšak tato jemnost v mechanickém provedení nesmí jíti tak daleko, že by se vahadlo jsouc zatíženo trvale prohnulo. Proto musí především býti rozhodnuto o tom, až do jakého největšího zatížení se má vah užívati. Jinak se pracuje vahadlo, má-li vydržeti (na obou stranách) ještě zatížení 5 *kg* neb 1 *kg*, a opět jinak pro 250 *g*, 100 *g*, 50 *g* neb jenom 20 *g*; to jsou údaje v praxi obvyklé.

Pravili jsme, že lze vzdálenost $OA_0 = l_0$ poněkud měniti. Za tím účelem bývá na vahadle upevněn šroub, na němž se matice jakožto hmota posuvná nahoru neb dolů dá pohybovati, čímž se poloha těžiště A_0 mění. Jiná menší na šroubu posuvná matička slouží ke korrekci rovnovážné polohy vahadla. Tato rovnovážná poloha pozoruje se pomocí ukazovatele na vahadle upevněného z pravidla směrem dolů obráceného na zvláštní stupnici. S vahadlem bývá konečně na přední straně spojen lineal, rozdělený na 10 neb též 20 dílců, nejlépe výřezy označených v té délce, kteráž odpovídá vzdálenosti 2L hran postranních hranolů. Na tomto linealu pošinuje se tak zvaný jezdec, malé závažíčko 10- neb 5milligrammové. Zařízení takové jest velmi výhodné, poněvadž pak netřeba velmi malých a tím právě nepohodlných závažíček milligrammových upotřebovati; na místě toho pošinuje se jezdec při uzavřených vahách do vzdálenosti $\frac{1}{10}L$, $\frac{2}{10}L$ atd. od osy C. Upevnění linealu na přední části vahadla ruší ovšem jeho souměrnost; proto shledáváme u mnohých vah, že lineal jest upevněn nad vahadlem v jeho prvé rovině symmetrie anebo že vahadlo samo v hořejší části je pracováno rovně a děleno, aby se ho přímo k pošinování jezdce mohlo užiti. Dlužno však vytknouti, že vzhledem k methodě vážení, kteráž pomocí kyvů stanoví rovnovážné polohy, jak o tom níže obšírně jednáme, nelze zásadně jiné upevnění linealu za správné uznati než to, kde lineal jest v rovině hran všech tří hranolů.

§ 6. Úprava vah.

Osa vahadla spočívá na lůžku, jež jest u jemných vah rovinné, u hrubších (bez arretace) úžlabovité. Lůžko jest upevněno na hlavním sloupu vah. Libellou vhodně umístěnou aneb olovničkou staví se sloup tak, aby osa spočinouc na lůžku byla vodorovnou. Na hranách hranolů postranních spočívají závěsy s lůžky, jež jsou též u jemných vah rovinné, u hrubších užlabovité. Na závěsích visí misky vah. Závěsy a misky tvoří stálé zatížení vahadla; při vážení netřeba tohoto zatížení si všímati; jde pak o to, aby přírůstek momentu na př. na levé straně, způsobený hmotou, kterouž vážíme, se rovnal přírůstku momentu na pravé straně způsobenému závažím Na dobu kyvu a na citlivost má však zatížení vahadla závěsy a miskou určitý vliv, kterýž při upotřebení příslušných formulí nutno bráti do počtu.

Důležitou část vah tvoří mechanismus, kterým lze váhy zabaviti (arretovati). Účel jest dvojí. Jednak má se tím docíliti, aby hrany všech tří hranolů, když se neváží, nebyly zbytečně zatíženy a tím aby se neotupovaly. Důležitější jest však účel druhý, aby se vahadlo svým hranolem vždy stejně položilo na příslušné lůžko, jakož i aby lůžka závěsů vždy stejně se položila na postranní hranoly. Zabavení vah děje se v určitém pořádku: nejprve vahadlo, pak závěsy, naposled misky. Vybavení děje se v pořádku opačném: nejprve misky, pak závěsy, naposled vahadlo. Zabavení (podchycení) misek není nutné, ale jest velmi pohodlné. Přidávání závaží děje se jenom, jsou-li váhy arretovány; když pak jsou též misky podepřeny, lze klásti na ně i větší hmoty bez obavy, že by neopatrným, prudším nárazem hmoty na misku kladené mohlo nějaké poškození vah vzniknouti. Arretace vah má jíti zcela jemně; při vybavení vah mají se misky i závěsy zcela současně spustiti a naopak při zabavení zachytiti. Ukazovatel vah arretovaných má státi nad středním bodem stupnice. Jak vybávení tak zejména zabavení vah nesmí se díti prudce, zvláště jsou-li váhy značně zatíženy; zabavení nechť se děje v té poloze, kdy ukazovatel vah je velmi blízký onomu střednímu bodu stupnice. Udaný zde pořádek při vybavení vah jest jediný možný; hledíc však k zabavení vah byl by pořádek opačný vhodnější. Váhy jemné musí vždy býti montovány ve skříni; nejenom proto, aby byly chráněny před prachem, sazemi atd., kterýmž v obyčejných našich latoratořích nelze se ubrániti, nýbrž hlavně proto, aby při vážení proudy vzduchové nerušily volné a pravidelné kývání vah. Definitivní vážení děje se vždy při skříni zavřené a ne přímo po uzavření, nýbrž po jisté přestávce, aby se vzduch uvnitř ve skříni uklidnil. Na skříni jest pak umístněn přístroj k pošinování jezdce na linealu vahadla často důmyslně upravený, aby se pošinování dálo jistě, aby se na vahadlo nemohl učiniti při tom náraz a aby se jezdec na lineálu sedící jistě podchytil a zvedl. Na vhodném místě jest ve skříni zavěšen teploměr; po případě též postaven malý vlhkoměr.

V době novější hotoví se u skříní vah též mechanismus, kterým lze při zavřené skříni klásti závaží — daná ve formě malých válečků — na pravou misku vah, kteráž pak ovšem nabývá k účelu tomu zcela zvláštní úpravy.

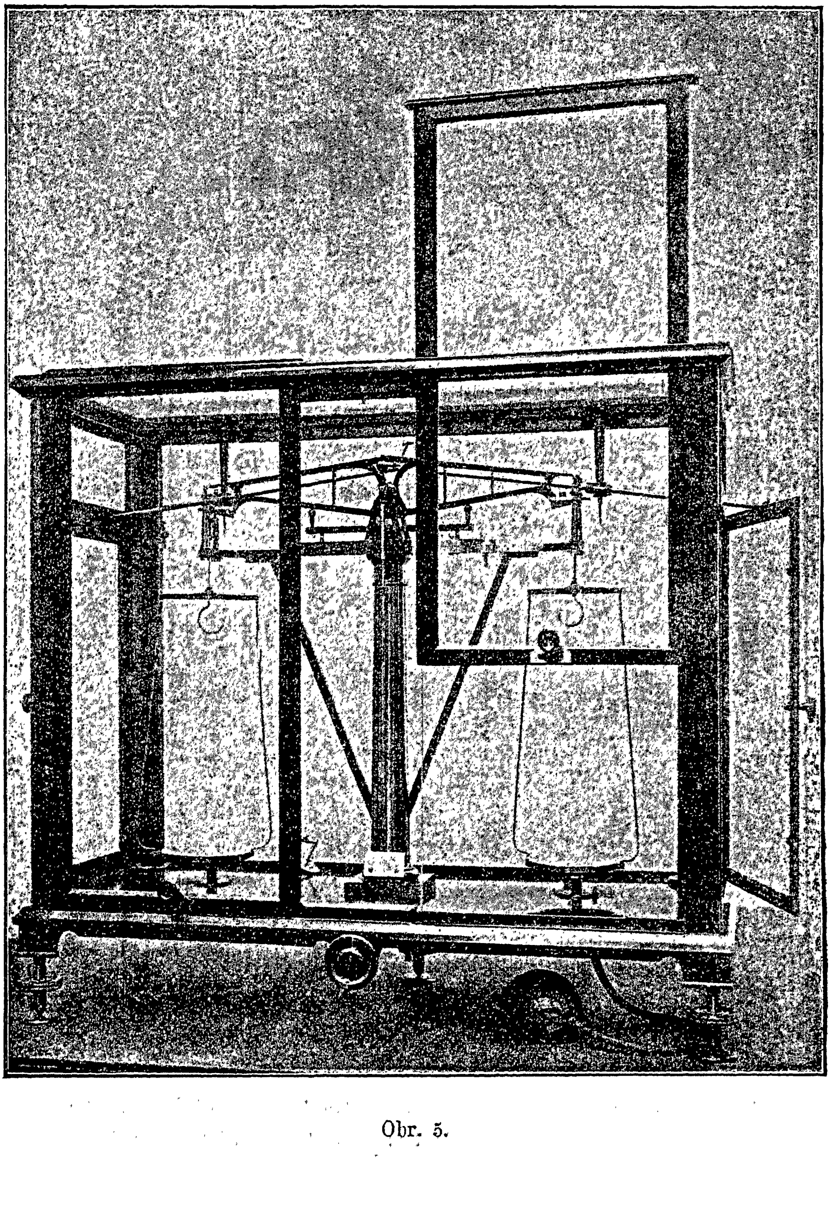
Dole na sloupu, kde končí ukazovatel vahadla, jest upevněna malá stupnice (obr. 4.). Dílce její bývají millimetry, někdy, zvláště užívá-li se optického zvětšení, mohou dílce býti také menší. Střední dílec přísluší (aspoň velmi blízce) rovnovážné poloze vah, jsou-li nezatíženy, t. j. jsou-li misky vah prázdny. Od středního tohoto dílce jest z pravidla deset dílců na pravo a deset na levo. Aby při odčítání nenastaly chyby parallaxou, jest žádoucno, aby konec ukazovatele byl těsně před stupnicí anebo ještě lépe nad stupnicí v téže s ní rovině.

Obr. 4.

Odčítání stupnice děje se při nejpřesnějším vážení pozorovacím dalekohledem; postačí však i pro účely velmi přesné postaviti do skřínky vah odčítací velkou konvexní čočku přiměřené dálky ohniskové, na př. $f = 15$ *cm*, montovanou na malém stojánku.

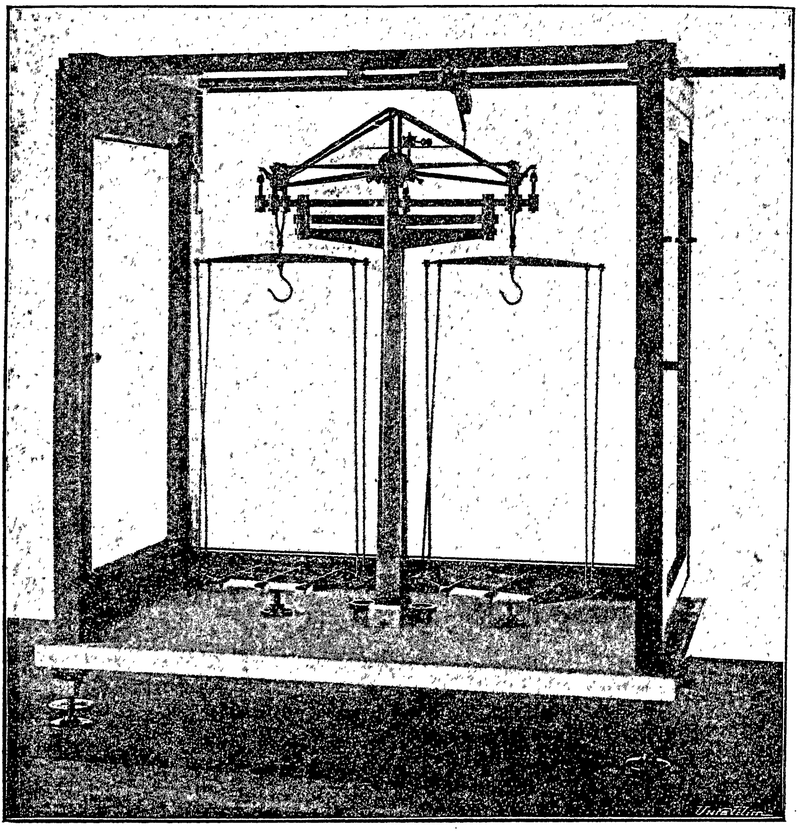
K objasnění toho, co o úpravě jemných vah bylo řečeno, buďtež připojeny následující příklady.

Obr. 5. ukazuje analytické váhy (Rueprecht), při nichž lze jíti do největšího oboustranného zatížení 250 *g*. Vážení zaručuje ještě několik (asi 3) setin *mg*. Pošinování jezdce jest zařízeno na obou stranách a děje se na vahadle samém, kteréž má na rameni pravém i levém dělení od 0 do 100 dílců pokračující. Arretace jest trojí. Skříň vah jest celá mosazná. To jest výhodou, poněvadž lze kov přesněji zpracovati než dřevo, tak že dvířka se pohybují volněji a desky skleněné v předu na pošinování vzhůru a dolů zařízené a vyvážené jdou rovněž jemněji než by



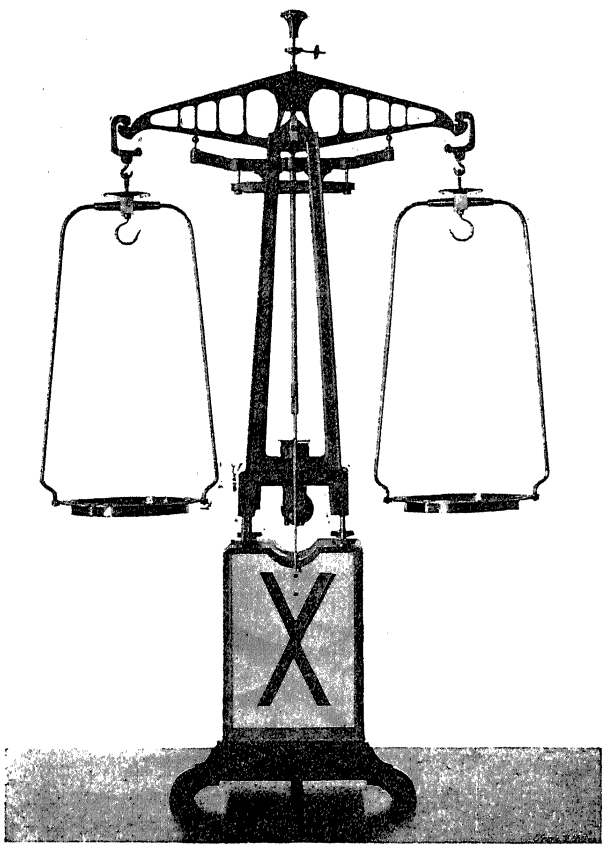
Obr. 5.

tomu bylo ve dřevě. Aby pak při vážení dle kyvů mohl pozorovatel docíliti snadno, bez nového zabavování a vybavování a také ovšem bez otvírání skříně vhodné amplitudy, jest dole po ruce gumový ballonek, jímž lze jemný proud vzduchu říditi proti misce na pravé straně.



Obr. 6.

Obr. 6. ukazuje velké fysikalní váhy (Bunge) krátkoramenné, při nichž lze jíti do největšího oboustranného zatížení až 1000 *g*. Jsou montovány na velké desce mramorové. Prostranná skříň jest dřevěná, zasklená; přední i zadní skleněná stěna jsou zařízené na zvedání a dají se vyndati úplně; po stranách jsou dvířka. Na pošinování jezdce jest lineal zvláštní před vahadlem, rozdělený na 100 dílů a opatřený v dělicích bodech jemnými výřezy, do nichž jezdec určitým vždy způsobem zasedne. Hranoly,

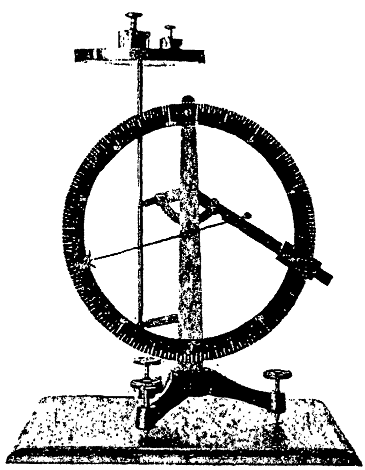


Obr. 7.

lůžka, jakož i podchycující polokulovité části arretace jsou vesměs achatové. Při obyčejném způsobu odčítání (lupou) jest i při zatížení největším zaručena jedna neb dvě desetiny *mg*. Jest zde však na vahadle upevněno též zrcádko pro pozorování dalekohledem se svislou stupnicí. Tím se přesnost odčítání dá zvětšiti značnou měrou, avšak přesnost vážení nelze zde vésti dále než na nejvýše na půl desetiny *mg*, poněvadž stálost poloh rovnovážných při značnějším zatížení nelze s větší přesností zaručiti.

Pro účely fysikalních experimentů v přednáškách hodí se velmi dobře váhy demonstrační (Rueprecht) v obrazci 7. znázorněné. Vydrží zatížení oboustranné až 5000 *g*. Aby změny rovnovážné polohy také z daleka bylo lze pozorovati, slouží zařízení z obrazce samého patrné. Misky na levo i na pravo lze vyndati a vložiti na jich místo nádoby skleněné aneb zavěsiti na drátkách tělesa jakákoli, na př. ke stanovení hmoty specifické a pod.

V mnohých případech jest při experimentech přednáškových pohodlnější užívati demonstračních vah na lati sloupu zavěšených,



Obr. 8.

kteréž tudíž směrem dolů visí zcela volně a umožňují zde rozestavení apparatu v úplné volnosti. Váhy takové seznáme při experimentech hydrostatických.

Službby velmi dobré konají váhy, jichž ukazovatel ihned výsledek vážení stanoví na stupnici, jež před tím empiricky se graduovala. U vah takových zvedá se při zatížení páka a přechází do nové polohy rovnovážné, se kterou pak poloha ukazovatele souvisí. Takové váhy ukazuje obr. 8. Odčítání jde do 1000 *g* a lze ještě odhadnutím 1 *g* stanoviti. Váhy takové orientují tedy rychle o hledané hmotě tělesa, která se pak definitivně na vahách jemných stanoví; to znamená jednak úsporu času a práce, jednak větší šetření jemných vah samých. Rozmanité modifikace vah takových jsou rozšířeny jako vážky listovní, nákladní a pod.

Pro velká břemena jsou zařízeny váhy decimalní anebo centesimalní, jichž konstrukce stává se velmi složitou, když jde o vážení břemen velmi velikých, na př. železničních waggonů s nákladem a pod. Váhy takové, v nichž již základy musí býti velmi solidní, montují se na určitých místech na nádražích; spouštění nákladů a zvedání děje se strojem buď parním nebo elektrickým.

§ 7. **Methoda pozorovací.**

Vybavíme-li váhy buď nezatížené anebo na obou miskách stejně, po případě i téměř stejně zatížené, kývají; tyto kyvy pozorujeme ukazovatelem na stupnici; dějí se kolem jisté rovnovážné polohy, na kteréž by se konečně váhy ustálily; neboť odporem vzduchu a jinými překážkami výkyvů ubývá. Avšak čekati, až by se váhy ustálily a pak polohu rovnovážnou odečísti, bylo by nejen ztrátou času, ale vedlo by též k nesprávnostem; neboť, když již výkyvy jsou zcela malé, může se zastavení státi nahodilou nějakou a jinak nepatrnou překážkou právě na místě, kteréž od skutečné polohy rovnovážné jest poněkud odchylné. Proto jest i z tohoto důvodu správnosti nutné tuto polohu počtem stanoviti na základě pozorování kyvů samých.

K účelu tomu třeba dílce stupnice číslovati. Mohli bychom dílec střední označiti jakožto nullový a počítati dílce na př. na pravo za positivní, na levo za negativní. Dvojí takové znamení bylo by však pro počítání nepohodlné a vedlo by k častým omylům. Proto jest lépe onen střední dílec označiti číslem 10 a bod nullový položiti stranou, buď na levo neb na pravo. Jest rozumné položiti jej tak, aby, když závaží přidáváme, kteréž se klade na misku pravou, pohyb ukazovatele se dál na stupnici směrem k číslům stoupajícím. Je-li tedy ukazovatel obrácen dolů, jak to bývá u vah jemných, jest přirozeno položiti nullový bod stupnice na pravo (obr. 4.).

Polohu rovnovážnou stanovíme z bodů obratu; sledujeme tedy okem pohyb ukazovatele a hledíme až na $\frac{1}{10}$ dílce stanoviti bod, kde se při kývání ukazovatel obrátil. Znamenejme tyto body obratu

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

Hledaná poloha rovnovážná budiž a_0.

Je-li tedy na př. $a_1 > a_0$, jsou výkyvy následující:

$$a_1 - a_0, \ a_0 - a_2, \ a_3 - a_0, \ a_0 - a_4, \ldots$$

Kdyby těchto výkyvů neubývalo, bylo by

$$a_1 - a_0 = a_0 - a_2,$$

tudíž

$$a_0 = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Stačilo by tedy pozorovati dva body obratu a z odečtení obou vzíti arithmetický průměr.

Avšak výkyvů ubývá následkem překážek pohybu, hlavně odporu vzduchu; jest tedy

$$(a_1 - a_0) > (a_0 - a_2) > (a_3 - a_0) > (a_0 - a_4) > \ldots$$

Zákon, dle kterého tato čísla se umenšují, závisí na tom, jak překážky pohybu působí. Obyčejně se předpokládá, že jsou úměrny rychlosti pohybu. Na tomto základě pak vychází, že ony amplitudy tvoří klesající řadu geometrickou. Dle toho jest

$$\frac{a_0 - a_2}{a_1 - a_0} = \frac{a_3 - a_0}{a_0 - a_2} = \frac{a_0 - a_4}{a_3 - a_0} = \ldots = k.$$

Stálý koefficient k, charakterisující kývání tlumené, zove se poměrem útlumu; jeho logarithmus zove se logarithmickým dekrementem amplitud.

Dlužno však uvážiti, že u vah překážky pohybu jsou uvedeny na míru nejskrovnější. Následkem toho jest poměr k jen o velmi málo menší než 1, tak že lze psáti

$$k = 1 - \varkappa,$$

kdež jest $\varkappa$ číslo velmi malé.

Nazveme-li ještě první výkyv $a_1 - a_0$ krátce e, obdržíme pro výkyvy, jež následují, hodnoty tyto:

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= e \\ a_0 - a_2 &= e(1-\varkappa) \\ a_3 - a_0 &= e(1-\varkappa)^2 \\ a_0 - a_4 &= e(1-\varkappa)^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Z těchto rovnic plyne dále:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + e \\ a_2 &= a_0 - e(1-\varkappa) \\ a_3 &= a_0 + e(1 - 2\varkappa + \varkappa^2) \\ a_4 &= a_0 - e(1 - 3\varkappa + 3\varkappa^2 - \varkappa^3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Na základě rovnic těchto lze posouditi, kolik bodů obratu a nutno nejméně pozorovati, aby se rovnovážná poloha určila a jak se určení toto má díti. Číslo $\varkappa$ jest, jak praveno, malé, tak že lze nikoli ovšem prvé, ale všech vyšších mocností tohoto čísla pomíjeti.

Vzhledem k této možnosti soudíme, že postačí pozorovati body obratu tři,

$$a_1,\ a_2,\ a_3;$$

neboť jest:

$$\frac{a_1 + a_3}{2} = a_0 + e\left(1 - \varkappa + \frac{\varkappa^2}{2}\right),$$

$$a_2 = a_0 - e(1-\varkappa),$$

tedy arithmetický průměr obou

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_3}{2} + a_2\right) = a_0 + e \cdot \frac{\varkappa^2}{4},$$

tedy $= a_0$ až na velmi malou hodnotu $e \cdot \frac{\varkappa^2}{4}$, kterouž lze zanedbávati.

Ještě přesněji lze polohu rovnovážnou a_0 určiti ze čtyř bodů obratu

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4.$$

Zde máme:

$$a_1 + a_4 = 2a_0 + e\,(3\varkappa - 3\varkappa^2 + \varkappa^3)$$
$$3\,(a_2 + a_3) = 6a_0 - e\,(3\varkappa - 3\varkappa^2),$$

tudíž součet obou:

$$a_1 + a_4 + 3\,(a_2 + a_3) = 8a_0 + e \cdot \varkappa^3.$$

Zde lze ještě větším právem než nahoře zanedbávati malou hodnotu $e \cdot \varkappa^3$; tím vychází:

$$\frac{1}{8}\,(a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4) = a_0.$$

Pozorovati snad pět bodů obratů nelze doporučovati. Neboť jest důležito, aby pozorovatel okem sledoval pohyb ukazovatele nepřetržitě, aby tudíž čísla bodům obratu odpovídající si prozatím pamatoval, a teprve po ukončení pozorování zaznamenal; tři čísla pak a dobře také ještě čtyři lze si pamatovati, více však již ne s jistotou; při větším počtu musil by tedy pozorovatel po každém odečtení bodu obratu psáti, tudíž oko obrátiti na papír, pak opět na ukazovatele a opět na papír atd., tedy střídavě brzy sem, brzy tam, což oko velmi unavuje a způsobuje neklid, kterým pak snadno chybná pozorování vznikají.

Početní schema pro tři pozorované body obratu jest patrno z následujícího příkladu*).

---

*) U následujících příkladů ze skutečnosti vzatých byly desetiny dílce odhadnuty: kde vznikla nejistota, má-li se na př. vzíti 11·2 neb 11·3, vzal se arithmetický průměr 11·25; jinak setiny se ovšem pozorovati nemohly, naproti tomu počet, jak je vždy pravidlem, vedl se o jedno decimální místo dále než jde pozorování, tedy zde na setiny.

$$\begin{array}{ccc} 9{\cdot}6 & 11{\cdot}25 & 9{\cdot}7 \\ & 9{\cdot}65 & \\ \hline & 10{\cdot}45 & \end{array}$$

Pozorovaná tři čísla píší se tedy do jedné řádky; pod druhé napíše se arithmetický průměr obou krajních a spojí se s oním druhým číslem v průměr definitivní udávající polohu rovnovážnou.

Početní schema pro čtyři pozorované body obratu vysvítá z následujícího příkladu:

$$\begin{array}{cccc} 11{\cdot}15 & 4{\cdot}75 & 10{\cdot}9 & 5{\cdot}1 \\ & 14{\cdot}25 & 32{\cdot}7 & \\ \hline \multicolumn{4}{c}{63{\cdot}20 : 8 = 7{\cdot}90} \end{array}$$

Pozorovaná čtyři čísla napíší se do jedné řádky, pod prostřední dvě dá se jich trojnásobné, pak utvoří se součet těchto trojnásobných a krajních a dělí osmi. Toto schema početní vychází z formule. Avšak tím přijdou do počtu zbytečně velká čísla, která mimo to nemají žádného zájmu, ničeho fysikalně neznamenajíce. Proto se daleko výhodněji počítá dle schematu následujícího:

$$\begin{array}{cccc} 11{\cdot}15 & 4{\cdot}75 & 10{\cdot}9 & 5{\cdot}1 \\ \hline \multicolumn{4}{c}{8{\cdot}13} \\ \multicolumn{4}{c}{\left.\begin{array}{c} 7{\cdot}83 \\ \hline 7{\cdot}98 \end{array}\right\} 7{\cdot}90} \end{array}$$

To znamená, že se výpočet rovnovážné polohy vede postupně z arithmetických průměrů dvou a dvou čísel. Utvoří se totiž arithmetický průměr z bodů obratu krajních a pod ten hned z bodů obratu středních; z obou utvoří se opět průměr, z tohoto pak a předchozího vypočítá se průměr definitivní, jenž jest hledanou polohou rovnovážnou. Pozorovatel jen poněkud cvičený tvoří ze dvou čísel průměr arithmetický bez skutečného teprve sečítání přímo z pohledu na čísla daná způsobem velmi rychlým. Zde pak jde výpočet proto ještě rychleji, poněvadž, když daná čtyři pozorování jsou do řádky napsaná, průměr krajních a průměr středních již téměř souhlasí; — jich rozdíl dává průměrný úbytek výkyvů. — Počítání další má tudíž vlastně jen ještě rozhodnouti poslední místa decimalní. Průměr oněch bodů obratu středních vstupuje do definitivního výsledku dvakrát vzhledem k tomu, že body obratu krajní hlasují pro výsledek jako by každý jedním hlasem, body obratu střední však každý jako by třemi hlasy. Z toho také plyne naučení, že na správné odečtení bodů obratu středních dlužno zvláště dbáti.

V případu zde voleném byly výkyvy dosti značné a rovnovážná poloha dosti se lišila od středního dílce stupnice. Váhy byly zatíženy.

Příklad následující dává pozorování u vah nezatížených:

$$\begin{array}{cccc} 9{\cdot}65 & 11{\cdot}25 & 9{\cdot}75 & 11{\cdot}1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10{\cdot}38 \\ \left.\begin{array}{c} 10{\cdot}50 \\ \hline 10{\cdot}44 \end{array}\right\} 10{\cdot}47. \end{array}$$

Rovnovážná poloha vah nezatížených zove se jich bodem nullovým.

Kdyby se tento byl odvodil pouze z prvých tří pozorování, bylo by vyšlo 10·48; kdyby se prvé pozorování vynechalo, vyšlo by z tří dalších 10·47, tedy v mezích chyb pozorovacích totéž.

Vůbec lze připustiti, že tři pozorování, jsou-li správná, postačí úplně i pro vážení velmi přesná. Avšak přes to jest přece lépe zvyknouti si na pozorování bodů obratu čtyř; neboť dva na pravo a dva na levo se vzájemně kontrolují; nahodilý omyl při odečtení se ihned prozradí; naproti tomu při pozorování tří bodů obratu zůstává na jedné straně pouze jediné odečtení, tak že nahodilé pochybení může spíše zůstati nepovšimnuto; a právě toto pochybné, poněvadž nekontrolované odečtení působí na výsledek dvěma hlasy. Pozorování pak čtyř bodů obratu jest také proto vhodnější, poněvadž nezpůsobuje výpočet rovnovážné polohy, když se vede, jak nahoře udáno, po průměrných hodnotách, pražádné větší obtíže než u tří bodů obratu. Budeme tedy v následujícím předpokládati, že rovnovážné polohy vah se určí z pozorovaných čtyř bodů obratu.

(Dokončení.)