Josef Novák

Spočetný ARU-prostor, jenž neobsahuje žádný bod spočetnosti

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. 2, 97--99

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109459

Spočetný ARU-prostor, jenž neobsahuje žádný bod spočetnosti.

J. Novák, Brno.

(Došlo dne 10. dubna 1937.)

Je známo, že charakter bodu ve spočetném AHU-prostoru[1]) nemusí býti spočetný. P. Urysohn podává příklad toho v pojednání „Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen", Math. Ann. **94**, str. 288. Jeho prostor sestává z isolovaných přirozených čísel a z čísla 0, jehož charakter je nespočetný.

V topologickém semináři položil prof. Čech dne 27. října 1936 tento problém: Existuje spočetný ARU-prostor,[2]) jehož charakter je v každém bodě nespočetný?

Dne 3. listopadu 1936 jsem podal v topologickém semináři konstrukci dvou spočetných ARU-prostorů s uvedenou vlastností. Každá neprázdná podmnožina prvého prostoru, jež neobsahuje isolovaný bod, je rovněž řešením tohoto problému.

Nechť P je množina všech racionálních čísel. Do P zavedeme topologii u_1 tím, že budeme definovati okolí. Nechť ε je kladné reálné číslo. ε-ovým okolím $O_1(a, \varepsilon)$ bodu $a \in P$ rozumíme množinu:

$$O_1(a, \varepsilon) = (a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n,\, a + \frac{1}{\pi^n}\right) . (a, a + \varepsilon),$$

kde ξ_n je iracionální číslo vyhovující vztahu $a + \frac{1}{\pi^{n+1}} \leqq \xi_n < < a + \frac{1}{\pi^n}$; jsou-li α, β reálná čísla, resp. $-\infty$ nebo $+\infty$, pak symbol (α, β) znamená množinu všech racionálních čísel mezi α a β.

Proběhne-li ε všecka kladná reálná čísla, dostaneme systém $\mathfrak{O}_1(a)$ částí množiny P té vlastnosti, že $\mathfrak{O}_1(a) \neq \emptyset$, $a \in O_1(a, \varepsilon)$ pro každé $\varepsilon > 0$. $\mathfrak{O}_1(a)$ je systém definujících okolí bodu a.[3]) Systémy tyto zavádějí do P topologii u_1.

---

[1]) Č. odst. 6·1, 7·1, 8·4 (Č znamená: Čech, Topologické prostory, Časopis **66** (1937), str. 225 D — 264 D).

[2]) Č. odst. 8·5.

[3]) Č. odst. 4·1.

Definujme ε-ové okolí $O_2(a, \varepsilon)$ bodu $a \in P$ takto:

$$O_2(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a) + O_1(a, \varepsilon).$$

Dostaneme jiné definující systémy $\mathfrak{O}_2(x)$, $x \in P$ bodů x, jimiž je zavedena do P topologie u_2. Poněvadž pro každý $x \in P$ existuje ke každému okolí $O_2(x, \varepsilon)$ okolí $O_1(x, \varepsilon) \subset O_2(x, \varepsilon)$ a nikoliv naopak, jest topologie u_2 silnější než topologie u_1.[3])

Snadno se dá dokázati, že v prostoru (P, u_i) $(i = 1, 2)$ jsou splněny tyto axiomy:

$(\mathrm{III}^\circ)_U$: Když $b \in O_i(a, \varepsilon)$, pak existuje okolí $O_i(b, \eta) \subset O_i(a, \varepsilon)$.

$(\mathrm{III}^\circ)_A$: Když $O' \in \mathfrak{O}_i(a)$, $O'' \in \mathfrak{O}_i(a)$, existuje okolí $O \in \mathfrak{O}_i(a)$ takové, že $O \subset O' . O''$.

Prostor (P, u_i) je tudíž AU-prostorem.[4])

Je-li ε kladné iracionální číslo, pak okolí $O_i(a, \varepsilon)$ $(i = 1, 2)$ jest uzavřené. Vskutku komplementární množina $P - O_i(a, \varepsilon)$ jest otevřená, neboť je součtem otevřených intervalů racionálních čísel tvaru (α, β), jež jsou, jak se snadno přesvědčíme, v prostoru (P, u_i) otevřené. Je tedy splněn také axiom $(\mathrm{III}^\circ)_R$, takže prostory (P, u_1) a (P, u_2) jsou spočetné ARU-prostory.[2])

Abychom dokázali, že žádný bod prostoru (P, u_i) $(i = 1, 2)$ není bodem spočetnosti, dokážeme napřed lema. Pravíme, že posloupnost bodů topologického prostoru R konverguje k bodu $x \in R$, když v každém jeho okolí se nacházejí skoro všecky body té posloupnosti.[5])

Lema. Nechť $x \in R$ je A-bod, jehož charakter je spočetný. Nechť $M \subset R$, $x \in \overline{M}$. Pak existuje v M bodová posloupnost, jež konverguje k bodu x.

Důkaz. Poněvadž x je A-bodem a bodem spočetnosti, existuje monotonní posloupnost $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ okolí bodu x, jež je úplným systémem okolí toho bodu. Poněvadž $x \in \overline{M}$, jest $O_n . M \neq \emptyset$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Zvolme bod $x_n \in O_n . \overline{M}$. Pak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je bodová posloupnost v M, jež konverguje k bodu x.

Nechť $a \in (P, u_i)$ $(i = 1, 2)$. Pro nepřímý důkaz předpokládejme, že $\chi_{u_i}(a) = \aleph_0$. Bod a náleží do uzávěru $u_i(\underset{x \in P}{E}[a < x])$, neboť každé okolí $O_i(a, \varepsilon)$ má body společné s množinou $\underset{x \in P}{E}[a < x]$. Proto podle lematu existuje v $\underset{x \in P}{E}[a < x]$ bodová posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, jež konverguje k bodu a. Neobsahuje-li množina $\left(a + \frac{1}{\pi^{n+1}}, a + \frac{1}{\pi^n}\right)$

---

[4]) Č. odst. 7·2 a konec odst. 6·3.

[5]) Je-li bod x, k němuž konverguje bodová posloupnost, H-bodem, pak tato konverguje k jedinému bodu x; není-li H-bodem, pak může tato posloupnost konvergovati také k jiným bodům.

žádný bod z této posloupnosti, položme $\eta_n = a + \frac{1}{\pi^{n+1}}$; v opačném případě obsahuje tento interval jenom konečný počet bodů posloupnosti. Existuje tudíž iracionální číslo η_n $\left(\eta_n < a + \frac{1}{\pi^n}\right)$ té vlastnosti, že interval racionálních čísel $\left(\eta_n, a + \frac{1}{\pi^n}\right)$ neobsahuje žádný bod z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. V okolích $O_1\left(a, \frac{1}{\pi}\right) = (a) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\eta_n, a + \frac{1}{\pi^n}\right)$, $O_2\left(a, \frac{1}{\pi}\right) = \left(a - \frac{1}{\pi}, a\right) + O_1\left(a, \frac{1}{\pi}\right)$ se nenachází žádný bod z konvergentní posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, což je spor. Proto $\chi_{u_i}(a) > \aleph_0$, t. j. charakter každého bodu v prostorech (P, u_1) a (P, u_2) je nespočetný.

Dokázali jsme, že v množině $\underset{x \in P}{E}[a < x]$ neexistuje bodová posloupnost konvergující k bodu a. Lehce se pozná, že při topologii u_1 taková posloupnost neexistuje ani v množině $\underset{x \in P}{E}[a > x]$, tedy ani v množině P—(a). Dokažme nyní, že každý bod libovolné neprázdné podmnožiny $Q \subset (P, u_1)$, jež neobsahuje isolovaný bod, má charakter nespočetný. Nechť $a \in Q$. Předpokládejme pro nepřímý důkaz, že v Q—(a) existuje bodová posloupnost, konvergující k bodu a. Pak tato posloupnost konverguje k témuž bodu také v prostoru (P, u_1) — (a), což je spor. Proto $\chi_Q(a) > \aleph_0$.

Naproti tomu prostor (P, u_2) nemá tuto vlastnost, jak ukazuje tento příklad: $Q = (a) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}\right) \subset (P, u_2)$. Bod a má v prostoru Q charakter $\aleph_0$.

Brno, topologický seminář.

*

Sur deux espaces réguliers et dénombrables sans points de caractère dénombrable.

(Extrait de l'article précédent.)

P. Urysohn a construit un espace dénombrable ayant un point de caractère indénombrable. Dans cet article on donne la construction de deux espaces réguliers dénombrables dont chaque point possède un caractère indénombrable. Le premier de ces espaces contredit d'une façon héréditaire au premier axiome de dénombrabilité tandisque l'autre ne possède pas cette propriété.