Časopis pro pěstování matematiky

Jan Mařík

O kvadratických polynomech, které nabývají mnoha prvočíselných hodnot

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 78 (1953), No. 1, 57--58

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117063`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1953

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

O KVADRATICKÝCH POLYNOMECH, KTERÉ NABÝVAJÍ MNOHA PRVOČÍSELNÝCH HODNOT

JAN MAŘÍK, Praha.

(Došlo dne 19. listopadu 1951.) DT: 512.31

Na str. 164 3. čísla *Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky*, roč. *74* (1950), je otištěn výtah z referátu, který jsem měl na česko-polském matematickém sjezdu v září 1949. Je tam uvedena také tato věta:

Buď p přirozené číslo; buď $k^2 + k + p$ prvočíslo pro všechna celá nezáporná k, pro něž platí $k(k + 1) \leqq \frac{p-1}{3}$. Buďte a, b celá nesoudělná čísla; buď $c = a^2 + ab + b^2p < p^2$. Pak je c prvočíslo.

Odtud plyne zejména (pro $b = -1$), že polynom

$$x^2 - x + p \tag{*}$$

nabývá prvočíselných hodnot pro $x = 1, 2, \ldots, p - 1$, jakmile jen jsou prvočísly čísla tvaru (*) pro všechna přirozená x, pro něž platí

$$x^2 - x \leqq \frac{p-1}{3}.$$

Tím je také vysvětlena „záhada", proč na př. polynom

$$x^2 - x + 41$$

nabývá vesměs prvočíselných hodnot pro $x = 1, 2, \ldots, 40$; podle uvedené věty to plyne z toho, že nabývá prvočíselných hodnot pro $x = 1, 2, 3, 4$.

Naskýtá se nyní otázka, která čísla p splňují předpoklady naší věty. Snadno zjistíme, že vyhovují čísla 2, 3, 5, 11, 17, 41; lze-li věřit tabulkám, je takovým číslem též 72491 (viz Хуа Ло-Кен, *Аддитивная теория простых чисел*, Труды математического института имени В. А. Стеклова, XXII, стр. 168). Jiné takové číslo asi známo není. Poznamenejme ještě, že u takových čísel p je výraz (*) prvočíslem na př. i pro ta (celá) $x \geqq 0$, která nejsou tvaru $p + k^2$ (k celé) a nejsou větší než $2p$.

Paní Marie Nováková, Praha II, Na Slupi 12, upozorňuje však ve svém dopise prof. B. Bydžovskému, že podobné vlastnosti mají i polynomy jiného tvaru. (Paní Nováková nebyla nikterak ovlivněna mým článkem; polynomů tvaru $x^2 - x + p$ si všímá také.) Uvádí mnoho příkladů; lze je rozdělit do tří skupin.

I. Polynomy tvaru $d(x^2 - x) + p$, $d = 1, 2, 3, 5$. Na př. polynom

$$5x^2 - 5x + 13 \quad (\text{resp. } 2x^2 - 2x + 19)$$

nabývá prvočíselných hodnot pro $x = 1, 2, \ldots, 12$ (resp. $1, 2, \ldots, 18$).

II. Polynomy tvaru $x^2 - x - p$; na př. polynom

$$x^2 - x - 109$$

nabývá nerozložitelných hodnot (t. j. hodnot tvaru $\pm q$, kde q je prvočíslo nebo 1) pro $x = 1, 2, \ldots, 28$.

III. Polynomy tvaru $x^2 - x - p^2$; na př. polynom

$$x^2 - x - 169 = x^2 - x - 13^2$$

nabývá nerozložitelných hodnot pro $x = 2, 3, \ldots, 25 = 2 \,.\, 13 - 1$. (Pro $x = 1$ a $x = 2p$ zde ovšem dostaneme při $p > 1$ vždy hodnotu rozložitelnou.)

Všimněme si ještě, že hodnoty polynomů můžeme snadno počítat rekurentně; diference tvoří aritmetickou posloupnost.

Bylo by jistě zajímavé, kdyby se i zde podařilo najít nějakou zákonitost.