

Jaroslav Hájek

Poznámka k článku „O jistých posloupnostech skupin bodů na kružnici“

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 1, 77--78

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117174>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

POZNÁMKA K ČLÁNKU „O JISTÝCH POSLOUPNOSTECH SKUPIN
BODŮ NA KRUŽNICI“

JAROSLAV HÁJEK, Praha.

(Došlo dne 21. září 1955.)

DT: 513.21
517.1

L. KOSMÁK v práci, zmíněné v nadpise¹⁾, dokazuje ve větě 2 tvrzení, které lze zformulovat takto: *Je-li posloupnost n -tic reálných čísel $[a_1^{(\nu)}, \dots, a_n^{(\nu)}]$, $\nu = 1, 2, \dots$, tvořena pomocí rekurentního vztahu*

$$a_k^{(\nu+1)} = (1 - b) a_k^{(\nu)} + b a_{k+1}^{(\nu)}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

kde

$$0 < b < 1$$

a

$$a_{n+1}^{(\nu)} = a_1^{(\nu)},$$

pak

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_k^{(\nu)} = \bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^{(1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Dokažme toto tvrzení pomocí několika jednoduchých nerovností. Zřejmě stačí najít konstantu λ , $0 < \lambda < 1$, takovou, že

$$\sum_{i=1}^n (a_i^{(\nu+1)} - \bar{a})^2 \leq \lambda \sum_{i=1}^n (a_i^{(\nu)} - \bar{a})^2, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Označme symbolem \sum_0 cyklický součet a napišme následující dvě identity, z nichž první je důsledkem rovnic (1) a druhá je evidentní:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i^{(\nu+1)} - \bar{a})^2 &= ((1 - b)^2 + b^2) \sum_{i=1}^n (a_i^{(\nu)} - \bar{a})^2 + \\ &+ 2(1 - b)b \sum_0 (a_i^{(\nu)} - \bar{a})(a_{i+1}^{(\nu)} - \bar{a}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sum_0 (a_i^{(\nu)} - a_{i+1}^{(\nu)})^2 = 2 \left[\sum_{i=1}^n (a_i^{(\nu)} - \bar{a})^2 - \sum_0 (a_i^{(\nu)} - \bar{a})(a_{i+1}^{(\nu)} - \bar{a}) \right]. \quad (5)$$

Dále, pro každé $\nu = 1, 2, \dots$ platí $\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^{(\nu)}$ a tedy

$$(a_k^{(\nu)} - \bar{a})^2 \leq \left(\sum_0 |a_i^{(\nu)} - a_{i+1}^{(\nu)}| \right)^2 \leq n \sum_0 (a_i^{(\nu)} - a_{i+1}^{(\nu)})^2, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

¹⁾ Viz Časopis pro pěstování matematiky, 80 (1955), 299—309.

takže

$$\sum_{i=1}^n (a_i^{(v)} - \bar{a})^2 \leq n^2 \sum_0 (a_i^{(v)} - a_{i+1}^{(v)})^2. \quad (6)$$

Nerovnost (6) ve spojení s identitou (5) dává

$$\sum_0 (a_i^{(v)} - \bar{a}) (a_{i+1}^{(v)} - \bar{a}) \leq \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) \sum_{i=1}^n (a_i^{(v)} - \bar{a})^2,$$

odkud v soulase s (4) dostáváme potřebnou nerovnost (3) ve tvaru

$$\sum_{i=1}^n (a_i^{(v+1)} - \bar{a})^2 \leq \left[1 - \frac{b(1-b)}{n^2}\right] \sum_{i=1}^n (a_i^{(v)} - \bar{a})^2, \quad v = 1, 2, \dots$$

Ještě bych chtěl upozornit na možnost teoreticko-pravděpodobnostní formulace problému: *Považujeme-li čísla $[a_1^{(v)}, \dots, a_n^{(v)}]$ za pravděpodobnosti stavů $1, 2, \dots, n$ v časových okamžicích $v = 1, 2, \dots$, pak rekurentními vztahy (1) je definován Markovův řetězec s maticí přechodu*

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 1-b & b & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1-b & b & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & 1-b & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ b & & 0 & 0 & \dots & 1-b \end{array} \right\|. \quad (7)$$

a rovnice (2) vyplývá ze známé ergodické věty a z cykličnosti matice.

Lze tedy k jejímu důkazu použít kterékoliv z metod užívaných v teorii Markovových řetězců. Metoda užitá L. Kosmákem je totožná s metodou založenou na přímém výpočtu pomocí Perronovy formule²⁾. Vskutku, čísla $1 - b + b\omega^m$ užitá ve vzorci (7) práce L. Kosmáka, nejsou ničím jiným než charakteristickými čísly matice (7).

²⁾ Teorii Markovových řetězců viz na př. v knize T. A. Sarymsakov „Osnovy teorii processov Markova“ 1954. Perronova formule je uvedena na str. 46 a příslušná ergodická věta na str. 49.