

Jan Mařík

Plošný integrál

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 81 (1956), No. 1, 79--82

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117175>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

REFERÁTY

PLOŠNÝ INTEGRÁL

(Vlastní referát o přednášce, proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 3. října 1955.)

Bud  $A$  omezená měřitelná část  $E_m$  ( $m$  přirozené); bud  $v$  vektorová funkce o složkách  $v_1, \dots, v_m$ , kde  $v_i$  jsou polynomy (v  $m$  proměnných). Potom je zřejmé

$$\int_A \operatorname{div} v(z) dz = \sum_{i=1}^m \int_A \frac{\partial v_i(z)}{\partial z_i} dz;$$

dále můžeme psát (je-li  $m > 1$ ) podle Fubiniovy věty na př.

$$\int_A \frac{\partial v_m(z)}{\partial z_m} dz = \int_{E_{m-1}} \left( \int_{A_x^m} \frac{\partial v_m(x, y)}{\partial z_m} dy \right) dx,$$

kde  $A_x^m$  je množina všech  $y \in E_1$ , pro něž  $[x, y] \in A$ . Předpokládejme dále, že množina  $A$  má tuto vlastnost:

( $V_m$ ) Pro skoro všechna  $x \in E_{m-1}$  existuje celé nezáporné číslo  $r$  a čísla  $a_1 < b_1 < \dots < a_r < b_r$ , tak, že míra množiny  $(A_x^m - G) \cup (G - A_x^m)$ , kde  $G = \bigcup_{j=1}^r (a_j, b_j)$ , je rovna nule

a že platí  $\int_{E_{m-1}} \varphi_m(x) dx < \infty$ , kde  $\varphi_m(x) = r$ .

Nyní je zřejmé

$$\int_A \frac{\partial v_m(z)}{\partial z_m} dz = \int_{E_{m-1}} \left[ \sum_{j=1}^r (v_m(x, b_j) - v_m(x, a_j)) \right] dx.$$

Dá se však očekávat, že poslední výraz bude mít smysl i v jiných případech, než když  $v_m$  je polynom. Především si všimněme, že body  $[x, a_j], [x, b_j]$  leží na hranici  $H$  množiny  $A$ . Bud tedy  $f$  omezená borelovská funkce na množině  $H$ . (Borelovské funkce jsou — zhruba řečeno — ty funkce, k nimž dospějeme postupnými limitními přechody, vycházejíce

od spojitých funkcí.) Je-li  $|f(x)| \leq C$  ( $x \in H$ ), je  $\left| \sum_{j=1}^r (f(x, b_j) - f(x, a_j)) \right| \leq 2Cr = 2C\varphi_m(x)$  pro skoro všechna  $x \in E_{m-1}$ . Lze dokázat, že funkce

$$\sum_{j=1}^r (f(x, b_j) - f(x, a_j)) = g(x) \tag{1}$$

je měřitelná; protože  $\int_{E_{m-1}} \varphi_m(x) dx < \infty$ , konverguje též  $\int_{E_{m-1}} g(x) dx$ . Vidíme tedy:

Jestliže omezená měřitelná množina  $A \subset E_m$  ( $m > 1$ ) má vlastnost  $(V_m)$ , můžeme na systému všech omezených borelovských funkcí  $f$  na hranici množiny  $A$  definovat funkcionál  $P_m$  předpisem

$$P_m(A, f) = P_m(f) = \int_{E_{m-1}} g(x) dx,$$

kde funkce  $g$  je určena vztahem (1).

Index  $m$  můžeme zřejmě (po provedení příslušných změn) nahradit kterýmkoli z indexů  $1, \dots, m-1$ . Nechť nyní má omezená měřitelná množina  $A$  všechny vlastnosti  $(V_1), \dots, (V_m)$ . Potom můžeme na systému všech omezených borelovských vektorů (t. j. vektorových funkcí  $v = [v_1, \dots, v_m]$ , kde  $v_1, \dots, v_m$  jsou omezené borelovské funkce) na hranici  $H$  množiny  $A$  utvořit funkcionál

$$P(v) = \sum_{i=1}^m P_i(v_i).$$

Dále se dá ukázat, že existuje konečná míra  $p$  na systému všech borelovských množin  $B \subset H$  a jednotkový borelovský vektor  $\nu$  na množině  $H$  tak, že pro každý omezený borelovský vektor  $v$  na  $H$  platí

$$P(v) = \int_H v \cdot \nu dp$$

( $v \cdot \nu$  je ovšem skalární součin). Vidíme, že funkcionál  $P$  můžeme skutečně nazvat plošným integrálem (podle plošné míry  $p$  ve směru vnější normály  $\nu$ ).

Ze způsobu, jakým jsme došli k funkcionálu  $P$ , je ihned vidět:

Jestliže funkce  $v_1, \dots, v_m$  mají spojité derivace 1. řádu v okolí množiny  $\bar{A}$ , pak pro vektorovou funkci  $v = [v_1, \dots, v_m]$  platí

$$\int_A \operatorname{div} v(z) dz = \int_H v \cdot \nu dp. \quad (2)$$

Bud' nyní  $\mathfrak{A}$  systém všech množin  $A \subset E_m$ , které jsou omezené měřitelné a které mají vlastnosti  $V_1, \dots, V_m$ . Vidíme, že ke každému  $A \in \mathfrak{A}$  existuje konečná míra  $p$  a jednotkový vektor  $\nu$  tak, že platí (2). Systém  $\mathfrak{A}$  byl však sestaven dosti uměle; přirozenější by bylo vyšetřovat na př. systém  $\mathfrak{A}'$  takto definovaný:

Množina  $A$  patří do  $\mathfrak{A}'$ , je-li omezená měřitelná v  $E_m$  a existuje-li na hranici  $H$  množiny  $A$  borelovská míra  $p$  a jednotkový borelovský vektor  $\nu$  tak, že platí (2) pro všechny vektory  $v$ , jejichž složky jsou polynomy. Dá se ukázat, že je tím míra  $p$  určena jednoznačně a vektor  $\nu$  „skoro jednoznačně“ (vzhledem k  $p$ ). Snadno se pak zjistí, že míra  $p$  je nutně konečná a že (2) platí pro každý vektor  $v$ , jehož složky mají spojité derivace 1. řádu v okolí množiny  $\bar{A}$ . Můžeme však jít ještě dále.

Všimněme si této věci: Je-li  $A \in \mathfrak{A}'$ , jsou-li složky vektoru  $v$  polynomy a splňuje-li vektor  $v$  vztah  $\|v(z)\| \leq 1$  pro každé  $z \in A$ , platí zřejmě též  $\|v(z)\| \leq 1$  pro každé  $z \in H$  a tedy

$$\left| \int_A \operatorname{div} v(z) dz \right| = \left| \int_H v \cdot \nu dp \right| \leq \int_H \|v\| \cdot \|\nu\| dp \leq p(H).$$

Přifadíme-li nyní každé omezené měřitelné množině  $A \subset E_m$  hodnotu

$$\|A\| = \sup_A \int_A \operatorname{div} v(z) dz$$

(kde  $v$  probíhá všechny vektory, jejichž složky jsou polynomy, a kde  $\|v(z)\| \leq 1$  pro každé  $z \in A$ ), vidíme, že pro každé  $A \in \mathfrak{A}'$  je  $\|A\| \leq p(H) < \infty$ . Utvoříme-li tedy systém  $\mathfrak{A}''$  všech omezených měřitelných množin  $A$ , pro něž  $\|A\| < \infty$ , máme vztah

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}''.$$

Dá se však ukázat, že všude platí rovnost, t. j.  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}''$ . Při důkaze vztahu  $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}'$

hrají důležitou roli některé věty z funkcionální analýsy. Míra  $p$ , příslušná k množině  $A \in \mathfrak{A}$ , splňuje vztah  $p(H) = \|A\|$ . Můžeme tedy říci, že  $\|A\|$  udává pro každou omezenou měřitelnou množinu  $A$  plošnou velikost jejího povrchu. Zároveň je vidět, že nelze definovat „rozumný“ plošný integrál přes hranici žádné omezené měřitelné množiny  $A$ , která nepatří do  $\mathfrak{A}$  (=  $\mathfrak{M}$ ). Systém  $\mathfrak{A}$  je silně „invariantní“; je-li totiž  $\varphi$  regulární zobrazení nějakého okolí množiny  $\bar{A}$  ( $A \in \mathfrak{A}$ ), je též  $\varphi(A) \in \mathfrak{A}$ . Je-li mimo to zobrazení  $\varphi$  prosté, platí „transformační vzorec“

$$P(A, v) = P(\varphi(A), w),$$

kde  $w(y) = |D(x)|^{-1} \cdot M(x) \cdot v(x)$ ;  $M$  je funkční matice zobrazení  $\varphi$ ,  $D$  je její determinant,  $M(x) \cdot v(x)$  je maticový součin (vektor  $v(x)$  pokládáme za sloupec),  $y = \varphi(x)$ .

K platnosti vztahu (2) jsme předpokládali, že složky vektoru  $v$  mají spojité derivace v okolí množiny  $\bar{A}$ . Tento předpoklad můžeme zeslabit na př. tímto způsobem:

*Bud'  $f$  funkce, definovaná v okolí  $G$  množiny  $\bar{A}$  ( $A \in \mathfrak{A}$ ). Bud'  $v$  spojitý vektor na množině  $G$ . Necht' pro každou krychli<sup>1)</sup>  $K \subset G$  platí*

$$\int_K f(x) dx = P(K, v). \quad (3)$$

*Potom platí též*

$$\int_A f(x) dx = P(A, v). \quad (4)$$

Má-li omezená množina  $A$  tu vlastnost, že funkce proměnné  $\varepsilon$

$$\frac{\text{míra } \Omega(H, \varepsilon)}{\varepsilon}$$

(kde  $\Omega(H, \varepsilon)$  je  $\varepsilon$ -ové okolí hranice  $H$  množiny  $A$ ) je omezená pro  $0 < \varepsilon < 1$ , platí  $A \in \mathfrak{A}$  a vztah (4) je správný, jestliže vektor  $v$  je spojitý na množině  $\bar{A}$ , jestliže platí (3) pro každou krychli  $K$ , ležící uvnitř  $A$ , a jestliže integrál  $\int_A f(x) dx$  existuje (ve smyslu Lebesgueově).

V konkrétních případech je nezbytné umět vyjádřit plošný integrál  $P(A, v)$  „klasickým způsobem“, t. j. v parametrickém tvaru. K tomu zavedeme tuto definici:

Řekneme, že  $\varphi$  je  $A$ -přípustné zobrazení množiny  $G$ , je-li  $A \subset E_m$ ,  $G$  otevřená v  $E_{m-1}$ , má-li zobrazení  $\varphi$  na množině  $G$  spojité derivace 1. řádu a je-li splněna tato podmínka:

Bud'  $w^q$  vnější součin vektorů  $\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{m-1}}$ . Pak ke každému bodu  $t_0 \in G$  existuje okolí  $U$  bodu  $t_0$  a kladné číslo  $\varepsilon$  tak, že pro každé  $t \in U$  a každé  $\delta \in (0, \varepsilon)$  platí

$$\begin{aligned} \varphi(t) + \delta w^q(t) &\text{ non } \in A, \\ \varphi(t) - \delta w^q(t) &\in A. \end{aligned}$$

Platí nyní tato věta:

*Necht'  $A \in \mathfrak{A}$ . Bud'  $\varphi_n$   $A$ -přípustné zobrazení množiny  $G_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Necht'  $\varphi_n(G_n) \cap \varphi_q(G_q) = \emptyset$  pro  $n \neq q$ ; necht'  $p(H - \bigcup_n \varphi_n(G_n)) = 0$ .<sup>2)</sup> Potom pro každou omezenou borelovskou funkci  $f$  na množině  $H$  platí*

$$\int_H f dp = \sum_n \int_{G_n} f(\varphi_n(t)) \|w^{q_n}(t)\| dt;$$

<sup>1)</sup> Krychli rozumíme kartézský součin  $m$  uzavřených omezených nezávislých intervalů stejné délky.

<sup>2)</sup>  $H$  je hranice množiny  $A$ ,  $p$  a  $v$  jsou příslušná míra a jednotkový vektor.

pro skoro všechna  $t \in G_n$  platí

$$\nu(\varphi_n(t)) = \frac{w^{\varphi_n(t)}}{\|w^{\varphi_n(t)}\|} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(Vztah  $p(B) = 0$  je splněn na př. tehdy, jestliže  $B$  je borelovská část  $H$  a jestliže všech  $m$  průmětů množiny  $B$  má  $m - 1$  — rozměrnou míru 0).

Nakonec se přednášející zmínil o tom, že tato theorie dává některé netriviální výsledky i pro  $m = 2$ .

*Jan Mařík, Praha*