Zbyněk Nádeník

Několik vlastností vrcholových nadrovin normálního mnohoúhelníka

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 81 (1956), No. 3, 287--291

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117204`

# NĚKOLIK VLASTNOSTÍ VRCHOLOVÝCH NADROVIN NORMÁLNÍHO MNOHOÚHELNÍKA

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha.

(Došlo dne 23. května 1955.)

DT :513.343
513.82

V článku jsou odvozeny některé vlastnosti vrcholových nadrovin normálního mnohoúhelníka, které budou později též potřebné k jeho dalšímu studiu.

Označení i názvosloví v tomto článku je totéž jako v autorově práci „Rozšíření věty Menelaovy a Cevovy na $n$-dimensionální útvary", Časopis pro pěst. mat. *81* (1956), č. 1. Odkazy v dalším textu týkají se všechny této práce.

Předmětem našich úvah bude opět normální mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ $n$-rozměrného eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_n$ ($n \geqq 2$). Podle dřívějších úmluv bude bod na přímce jeho strany $a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n + 1$) různý od vrcholů označen $B_i$ a nadrovina, která jej spojuje s vrcholovým podprostorem protějším straně $a_i$, bude označena $\beta_i$. Vrcholová nadrovina, která jde vrcholovým podprostorem protějším straně $a_i$ rovnoběžně s přímkou této strany $a_i$, bude označena $'\beta_i$.

**Věta 1.** *Budiž n liché. Nechť body*

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_r}, \quad 1 \leqq r \leqq n + 1, \tag{1}$$

*leží v nadrovině $\beta$, která je při $r \leqq n$ rovnoběžná s přímkami stran*

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_s}, \quad s = n - r + 1 .^{*)} \tag{2}$$

*Pak vrcholové nadroviny*

$$\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}, \quad 1 \leqq r \leqq n + 1, \tag{3}$$

*a při $r \leqq n$ ještě vrcholové nadroviny*

$$'\beta_{j_1}, '\beta_{j_2}, \dots, '\beta_{j_s}, \quad s = n - r + 1, \tag{4}$$

*mají společný právě jeden bod B anebo právě jeden směr b a obráceně.*

*Při n sudém věta neplatí.*

*) Viz úmluvu 1,2 cit. práce.

Důkaz plyne bezprostředně z vět 2,1—2,4 citované práce.

Poznámka 1. Věta ukazuje, že vlastnosti normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ budou různé podle parity dimense $n$. Později poznáme tyto rozdíly podrobněji.

**Věta 2.** *Nadrovina $\beta$ a bod $B$ nebo směr $b$ z věty 1 jsou incidentní.*

Důkaz. Označme $\mathbf{E}^{(k)}_{n-2}$, $k = 1, 2, \ldots, n + 1$, $(n - 2)$-dimensionální podprostor, který je průnikem nadroviny $\beta$ s vrcholovou nadrovinou $\beta_k$ (je-li $k$ mezi čísly $i_1, i_2, \ldots, i_r$) nebo $'\beta_k$ (je-li $r \leqq n$ a $k$ mezi čísly $j_1, j_2, \ldots, j_s$).

Podprostory $\mathbf{E}^{(1)}_{n-2}, \mathbf{E}^{(3)}_{n-2}, \ldots, \mathbf{E}^{(n)}_{n-2}$ mají společný podprostor, který z bodů (1) obsahuje ty, jež mají liché indexy a při $r \leqq n$ je rovnoběžný s přímkami těch stran (2), které mají opět liché indexy (existují-li ovšem takové). Tento podprostor má dimensi $\frac{1}{2}(n + 1) - 1$, jak snadno plyne z věty 1,1 citované práce; označíme jej $\mathbf{E}^*$.

Podobně mají i podprostory $\mathbf{E}^{(2)}_{n-2}, \mathbf{E}^{(4)}_{n-2}, \ldots, \mathbf{E}^{(n+1)}_{n-2}$ společný podprostor, který jde těmi z bodů (1), jež mají sudé indexy a při $r \leqq n$ je rovnoběžný s přímkami těch stran (2), které mají rovněž sudé indexy. Tento podprostor je opět dimense $\frac{1}{2}(n + 1) - 1$ a označíme jej $\mathbf{E}^{**}$.

Podprostory $\mathbf{E}^*$ a $\mathbf{E}^{**}$ leží v nadrovině $\beta$ prostoru $\mathbf{E}_n$, avšak nikoliv v podprostoru dimense menší než $n - 1$ (viz opět větu 1,2 citované práce). To znamená, že mají společný buďto právě jeden bod $B$, anebo právě jeden směr $b$. Poněvadž pak tento bod $B$ (směr $b$) je společný nadrovině $\beta$ i všem vrcholovým nadrovinám (3) a při $r \leqq n$ i vrcholovým nadrovinám (4), je věta dokázána.

**Definice 1.** *Vrcholovou nadrovinu normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$, která je rovnoběžná s přímkou jeho strany protější vrcholovému podprostoru, jímž prochází, nazveme význačnou vrcholovou nadrovinou.*

Věty 3 a 4 dokážeme současně.

**Věta 3.** *Budiž $n$ sudé. $n + 1$ význačných vrcholových nadrovin normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ nemá společný žádný bod ani žádný směr.*

**Věta 4.** *Budiž $n$ liché. $n + 1$ význačných vrcholových nadrovin normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ má společný právě jeden směr, který nazveme jeho význačným směrem.*

Důkazy věty 3 a 4: Předpokládejme, že jsme prostor $\mathbf{E}_n$ vnořili do nějakého $(n + 1)$-dimensionálního prostoru $\mathbf{E}_{n+1}$. Zvolme nyní v $\mathbf{E}_{n+1}$ nadrovinu $\mathbf{E}^*_n$ tak, aby nadrovinu $\mathbf{E}_n$ protínala v podprostoru dimense $n - 1$, který není rovnoběžný s přímkou žádné strany mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ normálního v $\mathbf{E}_n$. Zvolme dále bod $S$ tak, aby existoval průsečík spojnice bodů $A_i$ a $S$ s nadrovinou $\mathbf{E}^*_n$ a označme jej $A^*_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n + 1)$. Taková volba nadroviny $\mathbf{E}^*_n$ a bodu $S$ je vždy možná a mnohoúhelník $A^*_1A^*_2 \ldots A^*_{n+1}$ je zřejmě normální v $\mathbf{E}^*_n$. Označme ještě $\beta^*_i$ průmět podprostoru $'\beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n + 1)$ z bodu $S$ do nadroviny $\mathbf{E}^*_n$. Dostaneme tak ovšem vrcholové nadroviny mnohoúhelníka $A^*_1A^*_2 \ldots A^*_{n+1}$ normálního v $\mathbf{E}^*_n$.

Spojnice vrcholů $A_i$, $A_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots, n + 1$; $A_{n+2} = A_1$) a spojnice vrcholů $A_i^*$, $A_{i+1}^*$ ($A_{n+2}^* = A_1^*$) jsou různoběžné. Nadrovina jdoucí bodem $S$ a podprostory $'\beta_i$, $\beta_i^*$ ($i = 1, 2, \ldots, n + 1$) protíná jejich rovinu v přímce rovnoběžné s přímkou strany $a_i$ mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ normálního v $\boldsymbol{E}_n$. Z toho plyne, že existuje průsečík spojnice vrcholů $A_i^*$, $A_{i+1}^*$ ($i = 1, 2, \ldots, n + 1$) s podprostorem $\beta_i^*$. Nesplývá ovšem s žádným z bodů $A_i^*$, $A_{i+1}^*$. Označíme jej $B_i^*$. Je zřejmé, že $n + 1$ bodů $B_1^*, B_2^*, \ldots, B_{n+1}^*$ leží v nadrovině $\beta^*$ podprostoru $\boldsymbol{E}_n^*$, která vznikne průnikem nadroviny $\boldsymbol{E}_n^*$ s nadrovinou v $\boldsymbol{E}_{n+1}$ rovnoběžnou s $\boldsymbol{E}_n$ a jdoucí bodem $S$.

Budiž předně $n$ sudé. Podle věty 1 nemají vrcholové nadroviny

$$\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_{n+1}^* \tag{5}$$

mnohoúhelníka $A_1^*A_2^* \ldots A_{n+1}^*$ normálního v $\boldsymbol{E}_n^*$ žádný bod ani žádný směr společný, a platí tedy totéž i o význačných vrcholových nadrovinách

$$'\beta_1, '\beta_2, \ldots, '\beta_{n+1} \tag{6}$$

mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ normálního v $\boldsymbol{E}_n$.

Budiž za druhé $n$ liché. Podle věty 1 mají podprostory (5) společný právě jeden bod anebo směr, který je podle věty 2 incidentní s podprostorem $\beta^*$. Z toho však ihned plyne, že nadroviny (6) mají společný právě jeden směr.

Poznámka 2. Věty 3 a 4 doplňují věty 2,3 a 2,4 citované práce i pro případ v nich vylučovaný. Význačné vrcholové nadroviny normálního mnohoúhelníka budou mít později důležitou úlohu při definici některých význačných bodů normálního mnohoúhelníka.

## Резюме

## НЕСКОЛЬКО СВОЙСТВ ВЕРШИННЫХ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ НОРМАЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

ЗБЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník), Прага.
(Поступило в редакцию 23/V 1955 г.)

Мы будем пользоваться терминологией и обозначениями, введенными в работе автора — „Распространение теорем Менелая и Чевы на $n$-размерные фигуры", — Časopis pro pěstování matematiky, *81* (1956) (смотри русское резюме этой статьи).

Тогда имеет место следующая теорема, которая в настоящей статье доказана в более общей форме:

*Пусть $n$ — нечётное число и $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ — нормальный многоугольник. Пусть точки*

$$B_1, B_2, \ldots, B_{n+1} \tag{1}$$

*лежат в гиперплоскости $\beta$. Вершинные гиперплоскости $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ нормального многоугольника $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$, которые из его вершинных подпространств проектируют точки* (1), *имеют только одну общую точку $B$ или только одно общее направление $b$.* (Если $n$—чётное, то это утверждение не имеет места.) *Гиперплоскость $\beta$ содержит точку $B$ или же направление $b$.*

Вершинную гиперплоскость нормального многоугольника $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$, которая проходит вершинным подпространством, противоположным стороне $a_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n + 1$), параллельно прямой этой стороны, обозначим через $\beta_i$. Для этих вершинных гиперплоскостей

$$'\beta_1, '\beta_2, \ldots, '\beta_{n+1} \tag{2}$$

тогда справедливо следующее утверждение:

*Если $n$—чётное число, то вершинные гиперплоскости* (2) *не имеют ни одной общей точки и никакого общего направления. Если $n$—нечётное, то они имеют в точности одно общее направление.*


## Résumé

## QUELQUES PROPRIÉTÉS DES HYPERPLANS DE SOMMETS D'UN POLYGONE NORMAL

ZBYNĚK NÁDENÍK, Prague.

(Reçu le 23 mai 1955.)

Nous faisons usage de la terminologie et de la symbolique introduites dans le travail de l'auteur „L'élargissement du théorème de Ménélaüs et de Céva sur les figures $n$-dimensionnelles" (voir le résumé français de ce travail dans le Časopis pro pěstování matematiky, *81* (1956)).

Dans le travail présent, l'auteur a démontré — aussi dans une forme un peu plus générale — le théorème suivant:

*Soit $n$ un nombre impair. Supposons que par les points*

$$B_1, B_2, \ldots, B_{n+1} \tag{1}$$

*sur les droites des côtés du polygone normale $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ passe un hyperplan $\beta$. Les hyperplans de sommets $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ qui projettent les points* (1) *des sous-espaces de sommets comme les centres de projections, ont commun un point $B$ ou*

*une direction b* (c'est à dire ,,un point à l'infini''). *L'hyperplan $\beta$ contient le point B resp. la direction b.*

Dans ce qui suit, nous désignons par $'\beta_i$ l'hyperplan de sommets du polygon normal $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ qui passe par le sous-espace de sommets opposé au côté $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n + 1)$ parallèlement à la droite de ce côté. Alors ces hyperplans de sommets distingués

$$'\beta_1, '\beta_2, \ldots, '\beta_{n+1} \tag{2}$$

ont la propriété suivante:

*Si n est un nombre pair, les hyperplans de sommets* (2) *n'ont commun ni un point ni une direction. Si n est un nombre impair, ils ont seulement une direction commune.*