Časopis pro pěstování matematiky

Jan Mařík
Poznámka o řídkých množinách v E_m

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 3, 337--341

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117209

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

POZNÁMKA O ŘÍDKÝCH MNOŽINÁCH V E_m

JAN MAŘÍK, Praha.

(Došlo dne 13. září 1955.) DT: 519.51

V práci je dokázána věta, která má asi tento názorný význam: Řídká množina v E_2 má míru 0, když jenom podél nemnoha rovnoběžek se souřadnými osami je příliš roztrhána. V E_m ($m > 2$) platí podobná věta pro řídké uzavřené množiny.

Lemma 1. *Buď P separabilní metrický prostor. Buď N nespočetná množina; každému $x \in N$ buď přiřazen bod $b(x) \in P$. Buď $\varepsilon > 0$. Potom existuje bod $c \in P$ tak, že pro nespočetně mnoho $x \in N$ platí $\Omega(c, \varepsilon) \subset \Omega(b(x), 2\varepsilon)$.**)

Důkaz. Buď C hustá spočetná část prostoru P. Přiřaďme každému $c \in C$ množinu N_c těch $x \in N$, pro něž $c \in \Omega(b(x), \varepsilon)$. Protože $\bigcup_{c \in C} N_c = N$, existuje $c \in C$ tak, že množina N_c je nespočetná. Pro každé $x \in N_c$ je pak $\Omega(c, \varepsilon) \subset \subset \Omega(b(x), 2\varepsilon)$.

Označení. Buď E_m m-rozměrný kartézský prostor. Je-li $m > 1$, i celé, $1 \leqq i \leqq m$, $B \subset E_m$, $x = [x_1, \ldots, x_{m-1}] \in E_{m-1}$, buď B_x^i množina všech $t \in E_1$, pro něž platí

$$[x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_i, \ldots, x_{m-1}] \in B .$$

Lemma 2. *Buď $B \subset E_m$ ($m > 1$); buď Ω neprázdná otevřená část E_{m-1}; buď A nespočetná část E_1; konečně buď T množina těch $x \in E_{m-1}$, pro něž má B_x^m nespočetně mnoho komponent. Nechť $\Omega \times A \subset B$ a nechť T je první kategorie (v E_{m-1}). Potom množina B není řídká.*

Důkaz. Jestliže množina A není řídká, není ani množina B řídká. Předpokládejme tedy, že množina A i množina B je řídká; ukážeme, že tento předpoklad vede ke sporu. Buďte $L_1, L_2, \ldots$ všechny komponenty množiny $E_1 - \bar{A}$ (je jich ovšem nekonečně mnoho). Dále buď $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, kde množiny T_n jsou řídké. Buď Ω_0 nějaká omezená otevřená neprázdná část množiny Ω; položme $G_1 = \Omega_0 - \bar{T}_1$. Protože G_1 je neprázdná otevřená množina a protože množina B je řídká, není $G_1 \times L_1 \subset \bar{B}$. Existuje tudíž bod $x_1 \in G_1$ a číslo

*) Je-li $a \in P$, $\delta > 0$, značí $\Omega(a, \delta)$ otevřenou kouli o středu a a poloměru δ.

$y_1 \in L_1$ tak, že $[x_1, y_1]$ non $\in \bar{B}$. Protože množina $(G_1 \times L_1) - \bar{B}$ je otevřená, existuje otevřené okolí Ω_1 bodu x_1 tak, že $\bar{\Omega}_1 \subset G_1$ a že žádný bod $[x, y_1]$, kde $x \in \Omega_1$, neleží v B. Položme dále $G_2 = \Omega_1 - \bar{T}_2$. Protože není $G_2 \times L_2 \subset \bar{B}$, existuje bod $x_2 \in G_2$ a číslo $y_2 \in L_2$ tak, že $[x_2, y_2]$ non $\in \bar{B}$ atd. Tímto způsobem sestrojíme posloupnosti $\{\Omega_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $\{G_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Množina Ω_0 je omezená a platí $\bar{\Omega}_n \subset G_n \subset \Omega_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; je tedy $\emptyset \neq$
$\neq \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 \cap \ldots \subset \Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \ldots$ Zvolme $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Potom platí jednak $[x, y_n]$ non $\in B$ pro $n = 1, 2, \ldots$, jednak $[x, y] \in B$ pro každé $y \in A$. Můžeme tedy každému bodu $y \in A$ přiřadit tu komponentu $K(y)$ množiny B_x^m, pro niž $y \in K(y)$. Nechť $z_1, z_2 \in A$, $z_1 < z_2$. Protože množina A je řídká, existuje z tak, že platí $z_1 < z < z_2$, z non $\in \bar{A}$. Nechť $z \in L_n$. Protože $L_n \subset (z_1, z_2)$, leží mezi body z_1, z_2 bod y_n, který nepatří do B_x^m; odtud plyne $K(z_1) \neq K(z_2)$. Zobrazení $y \to K(y)$ je tedy prosté; vidíme, že množina B_x^m má nespočetně mnoho komponent. Protože však platí $x \in \Omega_n \subset G_n \subset \Omega_{n-1} - \bar{T}_n$ pro $n = 1, 2, \ldots$, neleží bod x v žádné z množin T_n a tedy ani v množině T. To je hledaný spor.

Označení. Buď $B \subset E_m$ $(m > 1)$, $y \in E_1$. Nechť ${}_yB$ značí množinu všech $x \in E_{m-1}$, pro něž je $[x, y] \in B$.

Lemma 3. *Buď $B \subset E_m$ $(m > 1)$. Buď T množina všech $x \in E_{m-1}$, pro něž má B_x^m nespočetně mnoho komponent. Nechť pro nespočetně mnoho $y \in E_1$ má množina ${}_yB$ vnitřní bod; T buď první kategorie (v E_{m-1}). Potom množina B není řídká.*

Důkaz. Buď Q množina všech y, pro něž má ${}_yB$ vnitřní bod. Ke každému $y \in Q$ existuje bod $b(y) \in E_{m-1}$ a číslo $\varepsilon(y) > 0$ tak, že $\Omega(b(y), \varepsilon(y)) \subset {}_yB$. Buď Q_n množina těch $y \in Q$, pro něž je $\varepsilon(y) > \frac{1}{n}$. Pro každé $y \in Q_n$ je pak $\Omega\left(b(y), \frac{1}{n}\right) \subset {}_yB$. Je $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = Q$; existuje proto n tak, že množina Q_n je nespočetná. Podle lemmatu 1 existuje $c \in E_{m-1}$ a nespočetná množina $A \subset Q_n$ tak, že je $\Omega = \Omega\left(c, \frac{1}{2n}\right) \subset \Omega\left(b(y), \frac{1}{n}\right)$ pro každé $y \in A$. Je tedy $\Omega \times A \subset B$; podle lemmatu 2 není množina B řídká.

Věta 1. *Buď měřitelná množina B řídká v E_2. Buď N_i množina všech $t \in E_1$, pro něž má B_t^i nespočetně mnoho komponent $(i = 1, 2)$. Nechť množina N_1 má míru 0 a nechť množina N_2 je první kategorie. Potom má B míru 0.*

Důkaz. Buď D množina těch $y \in E_1$, pro něž má ${}_yB$ kladnou míru. Připusťme, že množina B má kladnou míru. Potom (podle Fubiniovy věty) má též D kladnou míru. Protože N_1 má míru 0, je množina $A = D - N_1$ nespočetná. Je-li $y \in A$, má množina ${}_yB = B_y^1$ kladnou míru a jen spočetně mnoho komponent. Aspoň jedna komponenta je tedy (nezvrhlý) interval; ${}_yB$ má tudíž vnitřní bod. Podle lemmatu 3 (kde klademe $T = N_2$) není množina B řídká. Tento spor dokazuje, že B má míru 0.

Poznámka. Jestliže množina $B \subset E_2$ je řídká a jestliže množiny N_1, N_2 mají míru 0, může ještě B mít kladnou míru, jak ukazuje tento příklad (kde množina B je dokonce uzavřená):

Seřaďme všechna racionální čísla intervalu $(0, 1)$ do posloupnosti $r_1, r_2, \ldots$ Jsou-li m, n přirozená čísla, položme

$$I_{m,n} = (r_m, r_m + 2^{-m-n}) \times (r_n, r_n + 2^{-m-n}) .$$

Dále buď $G = \bigcup_{m,n} I_{m,n}$, $K = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, $B = K - G$. Míra G je menší než $\sum_{m,n} 4^{-m-n} = \sum_{m=1}^{\infty} 4^{-m} . \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} = \frac{1}{3} . \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, takže množina B má kladnou míru (a zřejmě je řídká). Položme ještě $J_n = (r_n, r_n + 2^{-n})$, $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} J_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Míra množiny A_n je menší než $\sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n+1}$, tedy míra průniku $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ je nula. Zvolme $t \in E_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Existuje p tak, že t non $\in A_p$; dále existuje přirozené q tak, že v intervalu $(t - 2^{-q}, t)$ neleží žádné z čísel $r_1, \ldots, r_p$. Nechť nyní v intervalu $I_{m,n}$ leží nějaký bod s první souřadnicí rovnou t. Protože $t \in (r_m, r_m + 2^{-m-n}) \subset J_m \subset A_m$, ale t non $\in A_p$, je $m < p$. Zároveň je však $t - 2^{-m-n} < r_m < t$; protože číslo r_m neleží v intervalu $(t - 2^{-q}, t)$, je $n < q$. Odtud plyne vztah $G_t^2 = H_t^2$, kde $H = \bigcup_{\substack{m<p \\ n<q}} I_{m,n}$; množina $B_t^2 = K_t^2 - H_t^2$ má tudíž jen konečný počet komponent. To platí pro každé $t \in E_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, tedy pro skoro všechna $t \in E_1$. Podobně lze zjistit, že pro skoro všechna $t \in E_1$ má B_t^1 jen konečný počet komponent.

Ještě snazší je sestrojit řídkou uzavřenou množinu $B \subset E_2$ s kladnou měrou tak, aby obě množiny N_1, N_2 byly první kategorie. Stačí položit $B = D \times D$, kde D je nějaká řídká uzavřená část E_1 s kladnou měrou.

Definice. Nechť m, i jsou celá, $m > 1$, $1 \leqq i \leqq m$ a nechť $B \subset E_m$. Buď $N(i, B)$ množina všech $x \in E_{m-1}$, pro něž má B_x^i nespočetně mnoho komponent; buď $M(i, B)$ uzávěr množiny $N(i, B)$. Buď $\mathfrak{R}^m$ systém všech množin B, které jsou uzavřené v E_m a pro něž mají množiny $M(1, B), \ldots, M(m, B)$ míru 0 (v E_{m-1}).

Věta 2. *Nechť množina $B \in \mathfrak{R}^m$ je řídká. Potom má míru* 0.

Důkaz. Buď napřed $m = 2$. Ve větě 1 je $N_i = N(i, B)$ $(i = 1, 2)$. Množina $M(2, B)$ je uzavřená a má míru 0; je tedy řídká. Tím spíše je $N_2 = N(2, B)$ množina první kategorie. Protože $M(1, B)$ má míru 0, má i $N_1 = N(1, B)$ míru 0. Podle věty 1 má tedy B míru 0.

Předpokládejme, že věta platí pro jisté $m \geqq 2$. Buď $B \in \mathfrak{R}^{m+1}$; nechť B má kladnou míru. Buď D množina těch $y \in E_1$, pro něž má ${}_yB$ kladnou míru; buď D_i množina těch $y \in E_1$, pro něž má ${}_y(M(i, B))$ kladnou míru ($i = 1, \ldots, m$). Množina $A = D - \bigcup_{i=1}^{m} D_i$ je nespočetná (protože množina D má míru > 0, kdežto množiny D_i mají míru 0). Zvolme $y \in A$; dokážeme, že platí ${}_yB \in \mathfrak{R}^m$. Buď tedy $x \in E_{m-1}$. Prvky množiny $({}_yB)_x^m$ jsou ta čísla t, pro něž je $[x, t] \in {}_yB$ neboli $[x, t, y] \in B$; odtud plyne $({}_yB)_x^m = B_{[x,y]}^m$, $N(m, {}_yB) = {}_y(N(m, B))$ a tedy (protože množina ${}_y(M(m, B))$ je uzavřená) $M(m, {}_yB) \subset {}_y(M(m, B))$. Protože y non $\in D_m$, má množina $M(m, {}_yB)$ míru 0. Podobně bychom zjistili, že též množiny $M(1, {}_yB), \ldots, M(m - 1, {}_yB)$ mají míru 0. Je tedy opravdu ${}_yB \in \mathfrak{R}^m$. Protože $y \in D$, má ${}_yB$ kladnou míru. Podle indukčního předpokladu nemůže být množina ${}_yB$ řídká; protože však je uzavřená, má vnitřní bod. Podle lemmatu 3 (kde klademe $T = N(m + 1, B)$) není ani množina B řídká. Tím je proveden indukční krok a věta je dokázána.

Poznámka. Buď B řídká množina ze systému $\mathfrak{R}^m$. Podle věty 2 má B míru 0; množina B_x^i má tedy míru 0 pro skoro všechna $x \in E_{m-1}$. Zároveň však má B_x^i pro skoro všechna x jen spočetně mnoho komponent; odtud plyne, že množina B_x^i je pro skoro všechna $x \in E_{m-1}$ spočetná .

Резюме

О НИГДЕ НЕ ПЛОТНЫХ МНОЖЕСТВАХ В E_m

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага.

(Поступило в редакцию 13/IX 1955 г.)

Определение. Пусть m — целое число > 1, i — целое число, $1 \leqq i \leqq m$; пусть E_m — m-мерное декартово пространство. Если $B \subset E_m$, $x = [x_1, \ldots, x_{m-1}] \in E_{m-1}$, то обозначим через B_x^i множество всех $t \in E_1$, для которых $[x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_i, \ldots, x_{m-1}] \in B$. Пусть, далее, $N(i, B)$ будет множество всех $x \in E_{m-1}$, для которых множество B_x^i имеет несчетное количество компонент; пусть $M(i, B)$ — замыкание множества $N(i, B)$. Наконец , пусть $\mathfrak{R}^m$ означает систему всех множеств B, которые замкнуты в E_m и для которых множества $M(1, B), \ldots, M(m, B)$ имеют меру 0.

Теорема 1. *Пусть B — нигде не плотное измеримое множество в E_2. Пусть $N(1, B)$ — множество первой категории; пусть $N(2, B)$ имеет меру 0. Тогда и B имеет меру 0.*

Теорема 2. *Пусть множество $B \in \mathfrak{R}^m$ нигде не плотно. Тогда оно имеет меру 0.*

Summary

A NOTE ON NON-DENSE SETS IN E_m

JAN MAŘÍK, Praha.

(Received September 13, 1955.)

Definition. Let m, i be integers, $m > 1$, $1 \leqq i \leqq m$; let E_m be the m-dimensional cartesian space. If $B \subset E_m$, $x = [x_1, \ldots, x_{m-1}] \in E_{m-1}$, we denote by B_x^i the set of all $t \in E_1$ such that $[x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_i, \ldots, x_{m-1}] \in B$. Let $N(i, B)$ be the set of all $x \in E_{m-1}$ for which the set B_x^i has a non-enumerable infinity of components; let $M(i, B)$ be the closure of $N(i, B)$. Finally, we denote by $\mathfrak{R}^m$ the system of all closed sets $B \subset E_m$ such that the measure of $M(i, B)$ is zero for $i = 1, \ldots, m$.

Theorem 1. *Let B be a non-dense measurable set, $B \subset E_2$. Let the measure of $N(1, B)$ be zero and let $N(2, B)$ be of the first category. Then B has measure zero.*

Theorem 2. *Let the set $B \subset \mathfrak{R}^m$ be non-dense. Then B has measure zero.*