Washek Frank Pfeffer

Интеграл Перрона в топологических пространствах

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 3, 322--348

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117466`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

ИНТЕГРАЛ ПЕРРОНА В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

ВАЦЛАВ ПФЕФФЕР (Václav Pfeffer), Прага

(Поступило в редакцию 16/I 1962 г.)

В статье при помощи мажорант и минорант определяется интеграл в топологическом пространстве, и доказываются для него основные теоремы. Исследуется также его отношение к интегралу Лебега.

1. Некоторые соглашения и обозначения. Пусть A — множество и пусть V — высказывание, зависящее от $x \in A$. Совокупность всех $x \in A$, для которых имеет место $V(x)$, обозначим через $\{x \in A : V(x)\}$.

Если множество A является частью *топологического пространства* P, то мы обозначим через $\bar{A}$ *замыкание* множества A и положим $A^0 = P - \overline{P - A}$. *Окрестностью* точки $x \in P$ будем называть всякое множество $U \subset P$, для которого $x \in U^0$.

Множество действительных чисел, пополненное элементами $\pm\infty$, обозначим E. Упорядочение и топологию в множестве E мы определим обычным способом. Положим

$$a + \infty = +\infty + a = +\infty + \infty = +\infty\,,$$
$$a - \infty = -\infty + a = -\infty - \infty = -\infty$$

для всех $a \in E$, $a \neq \pm\infty$; $-(-\infty) = +\infty$, $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$. Умножение и деление в E определим следующим образом: $a \,.\, (\pm\infty) = (\pm\infty) \,.\, a = \pm\infty$, если $a > 0$, $a \,.\, (\pm\infty) = (\pm\infty) \,.\, a = \mp\infty$, если $a < 0$, $0 \,.\, (\pm\infty) = (\pm\infty) \,.\, 0 = 0$; $a/0 = +\infty$, если $a > 0$, $a/0 = -\infty$, если $a < 0$; $a/b = a \,.\, (1/b)$ для каждых a, $b \in E$, $b \neq 0$, $b \neq \pm\infty$. Символы $+\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $0/0$, $a/\pm\infty$ мы считаем лишенными смысла. Для всех $a \in E$ пусть $a^+ = \max(a, 0)$ и $a^- = \max(-a, 0)$.

Отображение любого множества A в множество E будем называть *функцией*, определенной на множестве A. Совокупность всех функций, определенных на множестве A, мы обозначим $\mathfrak{F}(A)$ и будем ее считать обычным способом полуупорядоченным множеством.

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ — произвольная последовательность. Так как недоразумение не угрожает, будем символом $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ (вкратце только $\{a_n\}$) обозначать также совокупность всех членов этой последовательности.

Пусть A — непустое множество и пусть f_n, $f \in \mathfrak{F}(A)$, $n = 1, 2, \ldots$. Если $\lim f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in A$, то это запишем в виде $\lim f_n = f$ или $f_n \to f$. Если, кроме того, последовательность $\{f_n\}$ является возрастающей или убывающей, то пишем соответственно $f_n \nearrow f$ или $f_n \searrow f$.

2. Дальнейшие соглашения. Пусть во всей этой работе P — непустое множество и пусть σ — непустая система его непустых подмножеств. Каждому $x \in P$ поставим в соответствие некоторое множество последовательностей $\{B_n\} \subset \sigma$ и обозначим его через κ_x. Скажем, что последовательности из κ_x *сходятся* к точке x, и вместо $\{B_n\} \in \kappa_x$ будем иногда писать $B_n \to x$.

Для $A \in \sigma$ будет $\sigma_A = \{B \in \sigma : B \subset A\}$ и A^* будет множество всех $x \in P$, для которых существует $\{B_n\} \subset \sigma_A$, $B_n \to x$. Если $A, B \in \sigma$ и $A \subset B$, то $\sigma_A \subset \sigma_B$ и $A^* \subset B^*$.

3. Определение. Пусть δ — непустая система множеств и пусть $F \in \mathfrak{F}(\delta)$. Функция F называется *аддитивной*, когда

$$F(A \cup B) = F(A) + F(B)$$

для всех $A, B \in \delta$, для которых $F(A) + F(B)$ имеет смысл, $A \cup B \in \delta$ и $A \cap B = \emptyset$. Если в последнем равенстве заменим знак $=$ знаком $\geqq$ или $\leqq$, то получим, соответственно, определение функции *супераддитивной* или *субаддитивной*.

4. Соглашение. Пусть во всей этой статье задана определенная конечная неотрицательная аддитивная функция $G \in \mathfrak{F}(\sigma)$.

5. Определение. Пусть $A \in \sigma$, $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ и $x \in P$. Через $\tau_x(F, A)$ мы обозначим совокупность всех $t \in E$, для которых существует такая последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_A$, что $B_n \to x$ и $F(B_n)/G(B_n) \to t$. Числа

$$_*F(x, A) = \inf \tau_x(F, A) \quad \text{и} \quad ^*F(x, A) = \sup \tau_x(F, A)$$

называются соответственно *нижней* и *верхней производной* от функции F относительно множества A в точке x. Если $_*F(x, A) = {}^*F(x, A)$, то это общее значение называется *производной* от функции F относительно множества A в точке x и обозначается $F'(x, A)$. Функция $\varphi \in \mathfrak{F}(P)$, определенная соотношением

$$\varphi(x) = {}_*F(x, A) \quad \text{или} \quad \varphi(x) = {}^*F(x, A)$$

для всех $x \in P$ называется соответственно нижней или верхней производной от функции F относительно множества A и обозначается соответственно $_*F(A)$ или $^*F(A)$.

Замечание. Если будет исключено недоразумение, мы будем вместо $_*F(x, A)$ и $_*F(A)$ писать только $_*F(x)$ и $_*F$; подобно $^*F$, F' и τ.

6. Обозначение. Пусть $A \in \sigma$, $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$, $x \in P$ и $c \in E$. Символом $F'(x) \sim c$ разумеется, что либо существует $F'(x)$ и $F'(x) = c$, либо $_*F(x) = -{}^*F(x) = = +\infty$.

7. Некоторые свойства производной. Если $A \in \sigma$, $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ и $x \in P$, то имеют место соотношения:

а) $\tau_x \neq \emptyset \Leftrightarrow {}_*F(x) \leqq {}^*F(x)$; $F'(x)$ существует тогда и только тогда, когда τ_x является одноточечным множеством; $x \notin A^* \Rightarrow {}_*F(x) = -{}^*F(x) = +\infty$;

б) $F = G$ [1]) $\Rightarrow F'(x) \sim 1$, $F = 0 \Rightarrow F'(x) \sim 0$, $F = \pm\infty \Rightarrow F'(x) \sim \pm\infty$;

в) ${}_*(-F) = -{}^*F$, $0 < c < +\infty \Rightarrow [{}_*(cF) = c_*F$ и ${}^*(cF) = c^*F]$; если $c \in E$, $c \neq 0$, $c \neq \pm\infty$ и если существует $F'(x)$, то существует также $(cF)'(x)$ и $(cF)'(x) = cF'(x)$;

г) $B \in \sigma_A \Rightarrow [{}_*F(A) \leqq {}_*F(B)$ и ${}^*F(A) \geqq {}^*F(B)]$;[1])

д) $[H \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ и $H \leqq F] \Rightarrow [{}_*H \leqq {}_*F$ и ${}^*H \leqq {}^*F]$;

е) если $\{F_n\} \subset \mathfrak{F}(\sigma_A)$ и $F_n \nearrow F$, то существует $\lim {}_*F_n$ и $\lim {}_*F_n \leqq {}_*F$.

8. Определение. Пусть $A \in \sigma$, $f \in \mathfrak{F}(A^*)$ и m, $M \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$. Функция M называется *мажорантой* функции f на множестве A, если

α) M — супераддитивна,

β) $x \in A^* \Rightarrow -\infty \neq {}_*M(x, A) \geqq f(x)$.

Функция m называется *минорантой* функции f на множестве A, если

α) m — субаддитивна,

β) $x \in A^* \Rightarrow +\infty \neq {}^*m(x, A) \leqq f(x)$.

Совокупность всех мажорант и минорант функции f на множестве A обозначим соответственно $\mathfrak{M}(f, A)$ и $\mathfrak{m}(f, A)$. Если не будет опасности недоразумения, будем писать только $\mathfrak{M}(f)$ или $\mathfrak{M}(A)$ или $\mathfrak{M}$ вместо подробного $\mathfrak{M}(f, A)$, и подобно для $\mathfrak{m}(f, A)$.

Замечание. Из приведенного определения непосредственно вытекает:

а) $m \in \mathfrak{m}(f) \Leftrightarrow -m \in \mathfrak{M}(-f)$;

б) $B \in \sigma_A \Rightarrow [\mathfrak{M}(A) \subset \mathfrak{M}(B)$ и $\mathfrak{m}(A) \subset \mathfrak{m}(B)]$.[1])

9. Определение. Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{F}(A^*)$. Числа

$$I_I(f, A) = \inf M(A) \quad [M \in \mathfrak{M}(f, A)], \quad I_S(f, A) = \sup m(A) \quad [m \in \mathfrak{m}(f, A)]$$

называются соответственно *верхним* и *нижним интегралом Перрона* (далее только интегралом) от функции f на множестве A. Если $I_I(f, A) = I_S(f, A)$, то это общее значение обозначается символом $I_E(f, A)$. Если сверх того $I_E(f, A) \neq \pm\infty$, то это число называется *интегралом* от функции f на множестве A и обозначается $I(f, A)$. Функция $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$, определенная соотношением

$$F(B) = I_I(f, B) \quad \text{или} \quad F(B) = I_S(f, B) \quad ^1)$$

[1]) Здесь, разумеется, мы отождествляем определенную функцию с той же функцией, рассматриваемой только на подмножестве ее области определения, но мы думаем, что читателю наверно ясно, в чем дело.

для всех $B \in \sigma_A$, называется соответственно *верхним* или *нижним неопределенным интегралом* от функции f на множестве A и обозначается соответственно $I_I(f)$ или $I_S(f)$. Положим

$$\mathfrak{P}_E(A) = \{f \in \mathfrak{F}(A^*) : I_I(f, A) = I_S(f, A)\}, \quad \mathfrak{P}(A) = \{f \in \mathfrak{P}_E(A) : I_E(f, A) \neq \pm\infty\},$$
$$\mathfrak{P}_0(A) = \{f \in \mathfrak{P}(A) : |f| \in \mathfrak{P}(A)\}.$$

10. Некоторые свойства интеграла. Если $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{F}(A^*)$, то имеют место соотношения:

а) $I_I(-f) = -I_S(f)$, $0 < c < +\infty \Rightarrow [I_I(cf) = cI_I(f)$ и $I_S(cf) = cI_S(f)]$;

б) $[c \in E,\ c \neq 0,\ c \neq \pm\infty$ и $f \in \mathfrak{P}_E(A)] \Rightarrow [cf \in \mathfrak{P}_E(A)$ и $I_E(cf, A) = cI_E(f, A)]$;

в) $[g \in \mathfrak{F}(A^*)$ и $g \leqq f] \Rightarrow [I_I(g) \leqq I_I(f)$ и $I_S(g) \leqq I_S(f)]$.

11. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{F}(A^*)$. Тогда функция $I_I(f)$ – супераддитивна и функция $I_S(f)$ – субаддитивна.*

Доказательство. Пусть $B_1, B_2 \in \sigma_A$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B = B_1 \cup B_2 \in \sigma_A$ и пусть $I_I(f, B_1) + I_I(f, B_2)$ имеет смысл. Если $I_I(f, B) < I_I(f, B_1) + I_I(f, B_2)$, то $I_I(f, B_i) > -\infty$, $i = 1, 2$ и существует такая $M \in \mathfrak{M}(B)$, что $M(B) < I_I(f, B_1) + I_I(f, B_2)$. Из 8 б) следует, что $M \in \mathfrak{M}(B_i)$ [1]; итак, $M(B_i) \geqq I_I(f, B_i)$, $i = 1, 2$. Принимая во внимание супераддитивность функции M, мы получаем

$$M(B) \geqq M(B_1) + M(B_2) \geqq I_I(f, B_1) + I_I(f, B_2),$$

что и есть противоречие.

Доказательство субаддитивности функции $I_S(f)$ вполне аналогично.

12. Определение. Пусть $\mathfrak{K}$ – система подмножеств топологического пространства P. Скажем, что система $\mathfrak{K}$ *локально конечна*, когда для каждой точки $x \in P$ существует такая окрестность U, что $U \cap K \neq \emptyset$ только для конечного числа множеств $K \in \mathfrak{K}$. Систему $\mathfrak{K}$ называем *покрытием* множества $A \subset P$, если $A = \bigcup K$ $(K \in \mathfrak{K})$. Скажем, что система $\mathfrak{K}'$ является *уплотнением* системы $\mathfrak{K}$, когда для каждого $K' \in \mathfrak{K}'$ существует такое $K \in \mathfrak{K}$, что $K' \subset K$.

13. Предположения. Если мы хотим, чтобы интеграл, определенный в 9, обладал какими-то „разумными" свойствами, мы должны что-то предполагать о множестве P, системе σ и множествах κ_x (см. 2).

В абзацах 21 – 40 будем предполагать, что выполняются требования:

$\mathscr{S}_1$. $(A, B \in \sigma$ и $A \not\subset B) \Rightarrow A - B \in \sigma$.

$\mathscr{K}_1$. Если $x \in P$, $\{B_n\} \in \kappa_x$ и $\{k_n\}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то также $\{B_{k_n}\} \in \kappa_x$.

$\mathscr{K}_2$. Если $x \in P$, $\{B_n\} \in \kappa_x$, $A \in \sigma$ и $A \cap B_n \in \sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, то также $\{A \cap B_n\} \in \kappa_x$.

$\mathscr{K}_3$. Если $A \in \sigma$, $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ супераддитивна и ${}_*F(x) = +\infty$ для всех $x \in A^*$, то $F > -\infty$.

В абзацах 42—56 мы будем сверх того предполагать, что выполняются требования:

$\mathscr{P}_1$. Множество P является локально компактным топологическим пространством Хаусдорфа (см. [3] гл. 2 и 5).

$\mathscr{K}_4$. Если $x \in P$, $\{B_n\} \in \kappa_x$ и если U является окрестностью точки x, то множество $\{n : B_n - U \neq \emptyset\}$ конечно.

В абзацах 60—63 мы заменим $\mathscr{K}_3$ следующими предположениями:

$\mathscr{S}_2$. Если $A \in \sigma$, то $\bar{A}$ компактно.

$\mathscr{S}_3$. Существует такая последовательность $\{\mathfrak{K}_n\}$ локально конечных непересекающихся покрытий пространства P, что $\mathfrak{K}_n \subset \sigma$ и $\mathfrak{K}_{n+1}$ является уплотнением $\mathfrak{K}_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

$\mathscr{K}'_3$. Если $K_n \in \mathfrak{K}_n$ и $K_{n+1} \subset K_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то существует такая точка $x \in P$, что $\{K_n\} \in \kappa_x$.

Итак, мы будем предполагать, что в абзацах 60—63 имеют место $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{S}_1 - \mathscr{S}_3$, $\mathscr{K}_1$, $\mathscr{K}_2$, $\mathscr{K}'_3$ и $\mathscr{K}_4$.

14. Примечания к предположениям. Несколько загадочно выглядит предположение $\mathscr{K}_3$; оно является, конечно, неявным требованием, предъявляемым множеству P, системе σ и множествам κ_x. Между прочим из него вытекает, что $A^* \neq \emptyset$ для каждого $A \in \sigma$.

Предпосылки, приведенные в 13, не являются взаимно независимыми. Из $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{K}_3$ и $\mathscr{K}_4$ следует $\mathscr{S}_2$ (см. 44) и из $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{S}_1 - \mathscr{S}_3$, $\mathscr{K}_2$ и $\mathscr{K}'_3$ следует $\mathscr{K}_3$ (см. 59). Заметим, однако, что $\mathscr{K}_3$ может быть справедливым и при других предположениях (см. 15—17). Из 59 вытекает, что все утверждения абзацев 1—11, 22—40 и 42—56 будут верны и при предпосылках, приведенных в 60. Следующих шесть абзацев разяснят читателю на достаточно общем примере это положение.

15. Соглашение. В абзацах 15—17, 19, 20 и 41 мы будем предполагать, что кроме $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{S}_1$, и $\mathscr{S}_2$ выполнены требования:

$\mathscr{P}_2$. Топологическое пространство P удовлетворяет первой аксиоме счетности.

$\mathscr{S}'_3$. Для каждой точки $x \in P$ существует такая полная система окрестностей $\mathfrak{Y}$, что $\mathfrak{Y} \subset \sigma$.

Далее предполагается в этих абзацах, что для каждой точки $x \in P$ есть κ_x система всех таких последовательностей $\{B_n\} \subset \sigma$, что множество $\{n : B_n - U \neq \emptyset\}$ конечно для любой окрестности U точки x.

Замечание. Из только что приведенных предпосылок легко вытекает, что $A^* = \bar{A}$ для всякого $A \in \sigma$.

16. Лемма. *Если $A, B \in \sigma$ и $A \cap B \neq \emptyset$, то также $A \cap B \in \sigma$.*

Доказателство. Если $B \subset A$, то $A \cap B = B \in \sigma$. Если $B \not\subset A$, то в силу $\mathscr{S}_1$

будет $B - A \in \sigma$. Так как $B \neq B - A$, то опять в силу $\mathscr{S}_1$ имеем $A \cap B = B - (B - A) \in \sigma$.

Примечание. При доказательстве предыдущей леммы мы использовали только предположение $\mathscr{S}_1$. Значит, лемма будет справедлива всюду там, где имеет место $\mathscr{S}_1$.

17. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ супераддитивна. Если ${}_*F(x) > -\infty$ для всех $x \in \bar{A}$, то $F > -\infty$.*

Доказательство. Предположим, что существует множество $B \in \sigma_A$, для которого $F(B) = -\infty$. Пусть Γ — система всех непустых компактных множеств $C \subset P$, обладающих следующим свойством: для каждого открытого множества $G \subset P$, содержащего C, найдется такое множество $Q \subset G$, что $Q \in \sigma_A$ и $F(Q) = -\infty$. Так как в силу $\mathscr{S}_2$ будет $\bar{B} \in \Gamma$, то $\Gamma \neq \emptyset$. Пусть $\Gamma_0 \subset \Gamma$ — непустая монотонная система и пусть $C_0 = \bigcap_{C \in \Gamma_0} C$. Множество C_0 непусто и компактно. Выберем открытое множество $G \subset P$, содержащее C_0. Так как $\{C - G\}_{C \in \Gamma_0}$ — монотонная система компактных множеств и $\bigcap_{C \in \Gamma_0} (C - G) = C_0 - G = \emptyset$, то найдется такое $C \in \Gamma_0$, что $C \subset G$. Отсюда легко следует, что $C_0 \in \Gamma$. Итак, в силу [3] гл. 0, теорема 25 (b) существует множество $D \in \Gamma$, являющееся минимальным в Γ.

Пусть множество D содержит только одну точку x. Пусть $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая полная система открытых окрестностей точки x (она существует в силу $\mathscr{P}_2$). По определению системы Γ существуют такие множества $Q_n \subset U_n$, что $Q_n \in \sigma_A$ и $F(Q_n) = -\infty$, $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, $Q_n \to x$ и, следовательно, $x \in \bar{A}$ и ${}_*F(x) = -\infty$. Это, однако, противоречит предположениям теоремы.

Если множество D содержит две различные точки x и y, то одноточечное множество $\{x\}$ не принадлежит Γ. Следовательно найдется такое открытое множество G, что $x \in G$ и что $F(Q) > -\infty$ для каждого $Q \in \sigma_A$, $Q \subset G$. В силу $\mathscr{S}'_3$ и $\mathscr{P}_1$ существует окрестность U точки x, для которой $U \subset G$, $U \in \sigma_A$ и $y \notin U$. Значит, множество $D - U^0$ является собственной непустой компактной частью множества D. Выберем отркытое множество $H \subset P$, содержащее $D - U^0$. Так как $H \cup U^0$ — открытое множество, $D \subset H \cup U^0$ и $D \in \Gamma$, то имеется такое $Q \in \sigma_A$, что $Q \subset H \cup U^0$ и $F(Q) = -\infty$. Если $Q \cap U = \emptyset$, то $Q - U = Q \in \sigma_A$ и $F(Q - U) = -\infty$. Если $Q \cap U \neq \emptyset$, то в силу 16 будет $Q \cap U \in \sigma_A$. Однако $Q \cap U \subset G$; значит, по выбору множества G имеем $F(Q \cap U) > -\infty$. Так как $F(Q) = -\infty$, то $Q \neq Q \cap U$. В силу $\mathscr{S}_1$ отсюда следует, что $Q - U \in \sigma_A$. Из предположения $F(Q - U) > -\infty$ вытекает

$$F(Q) = -\infty < F(Q \cap U) + F(Q - U),$$

что и противоречит супераддитивности функции F; значит, $F(Q - U) = -\infty$. Так как $Q - U \subset Q - U^0 \subset H$, то $D - U^0 \in \Gamma$. Это, однако, противоречит минимальности множества D в Γ.

Следствие. Требования абзаца 15 гарантируют выполнение предположений $\mathscr{K}_1 - \mathscr{K}_4$ (см. 13). В самом деле, справедливость предположений $\mathscr{K}_1$, $\mathscr{K}_2$ и $\mathscr{K}_4$ очевидна и справедливость предположения $\mathscr{K}_3$ следует из предыдущей теоремы.

Примечание. Из доказательства теоремы 17 вытекает следующее утверждение:

Пусть $A \in \sigma$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ супераддитивна. Если $F(A) = -\infty$, то существует точка $x \in \bar{A}$ и такая последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_A$, что $B_n \to x$ и $F(B_n) = -\infty$, $n = 1, 2, \ldots$.

18. Пример. Пусть P — естественно упорядоченное множество всех порядковых чисел $x \leqq \omega_1$, где ω_1 — первое несчетное порядковое число, и пусть σ — — система всех подмножеств множества P. Топологизируя множество P обычным образом, мы получим компактное топологическое пространство Хаусдорфа, неудовлетворяющее первой аксиме счетности (всякая полная система окрестностей точки ω_1 несчетна). Система σ, очевидно, удовлетворяет требованиям $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ (см. 13) и $\mathscr{S}_3'$ (см. 15). Множества κ_x определяются таким же способом, как и в 15. Для $B \in \sigma$ положим $F(B) = 0$, если B счетно, и $F(B) = -\infty$, если B несчетно. Определенная таким образом функция F аддитивна и $F(P) = -\infty$. Выберем $x \in P$ и $\{B_n\} \subset \sigma_A$, $B_n \to x$. Если $x < \omega_1$, то существует счетная окрестность точки x. Следовательно, множества B_n счетны для всех достаточно больших n. Если $x = \omega_1$, обозначим x_n первый элемент множества B_n, $n = 1, 2, \ldots$. Так как $x_n \to \omega_1$, то $x_n = \omega_1$, и, следовательно, $B_n = \{\omega_1\}$ для всех достаточно больших n. Значит, в обоих случаях ${}_*F(x) \geqq 0$.

Следствие. Предположение $\mathscr{P}_2$ является существенным для справедливости теоремы 17.

19. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$, $B \subset \bar{A}$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$. Если для всех $x \in B$ существует $F'(x, A)$, то нижняя производная ${}_*F(A)$ непрерывна на множестве B.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $t \in E$. Положим $U(t, \varepsilon) = (t - \varepsilon,\ t + \varepsilon)$, если $t \neq \pm\infty$, $U(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$ и $U(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$. Выберем $x_n \in B$, $n = 0, 1, \ldots$ так, чтобы $x_n \to x_0$, и обозначим $F'(x_n) = {}_*F(x_n) = t_n$. Для всякого натурального числа n существует такая последовательность $\{B_k^n\}_{k=1}^{\infty} \subset$ $\subset \sigma_A$, что $B_k^n \to x_n$ и $F(B_k^n)/G(B_k^n) \to t_n$. Пусть $\{U_p\}_{p=1}^{\infty}$ — убывающая полная система открытых окрестностей точки x_0. Не умаляя общности, предположим, что $x_n \neq x_0$ и обозначим через p_n то натуральное число, для которого $x_n \in U_{p_n}$ и $x_n \notin U_{p_n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, существуют такие натуральные числа k_n, что если обозначим $A_n = B_{k_n}^n$, то будет $F(A_n)/G(A_n) \in U(t_n, 1/n)$ и $A_n \subset U_{p_n}$. К любому U_p найдется такое n_0, что $x_n \in U_p$ и, следовательно, $A_n \subset U_{p_n} \subset U_p$ для всех $n \geqq n_0$. Значит, $A_n \to x_0$ и, следовательно, $F(A_n)/G(A_n) \to t_0$. Отсюда вытекает, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, то $U(t_0, \varepsilon) \cap U(t_n, 1/n) \neq \emptyset$ для всех достаточно больших n. Различая случаи $t_0 \neq \pm\infty$, $t_0 = +\infty$ и $t_0 = -\infty$, мы легко обнаружим, что $t_n \to t_0$.

20. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$. Если ${}_*F(x) > -\infty$ для всех $x \in \bar{A}$, то также* $\inf\limits_{x \in \bar{A}} {}_*F(x) > -\infty$.

Доказательство. Пусть $\inf\limits_{x \in \bar{A}} {}_*F(x) = -\infty$. Тогда можно найти такие $x_n \in \bar{A}$, что ${}_*F(x_n) < -n$, $n = 1, 2, \ldots$. Для каждого натурального числа n найдется такая последовательность $\{B_k^n\}_{k=1}^{\infty} \subset \sigma_A$, что $B_k^n \to x_n$ и $\lim\limits_{k\to\infty} [F(B_k^n)/G(B_k^n)] < -n$. В силу $\mathscr{S}_2$ существует предельная точка последоватеьности $\{x_n\}$; обозначим ее x_0. Пусть $\{U_p\}_{p=1}^{\infty}$ — убывающая полная система открытых окрестностей точки x_0. Так как всякое U_p содержит некоторую точку x_{n_p}, $n_p \geqq p$, то имеется множество $A_p = B_{k_p}^{n_p} \subset U_p$, для которого $F(A_p)/G(A_p) < -p$. Очевидно, $A_p \to x_0$; итак, ${}_*F(x_0) = -\infty$. Это, однако, противоречит предположению теоремы, так как $x_0 \in \bar{A}$.

Примечание. В доказательствах теорем 19 и 20 нигде не используются предположения $\mathscr{S}_1$ и $\mathscr{S}'_3$. В доказательстве тоеремы 19 не используется ни предположение $\mathscr{S}_2$, и, следовательно, для доказательства этой теоремы не требуется ни локальной компактности пространства P.

21. Соглашение. Пусть теперь P — опять абстрактное множество, σ — некоторая система его подмножеств и κ_x — некоторые множества последовательностей. Вплоть до конца абзаца 40 мы будем предполагать, что выполнены требования $\mathscr{S}_1$ и $\mathscr{K}_1 - \mathscr{K}_3$.

22. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$, $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$, $x \in P$, $c \in E$ и пусть ${}_*F(x) > c$. Если $\{B_n\} \subset \subset \sigma_A$ и $B_n \to x$, то существует такое n_0, что $F(B_n) \geqq cG(B_n)$ для всех $n \geqq n_0$.*

Доказательство. Из $F(B_n) < c\, G(B_n)$ следует $F(B_n)/G(B_n) \leqq c$. Допустим, что утверждение леммы неверно. Тогда существует такая подпоследовательность $\{B_{k_n}\}$ последовательности $\{B_n\}$, что $\lim [F(B_{k_n})/G(B_{k_n})] \leqq c$. Это, однако, невозможно в силу $\mathscr{K}_1$.

23. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$, F, $F_i \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$, $i = 1, 2$ и $x \in P$. Если для всех $B \in \sigma_A$ справедливо $F(B) = F_1(B) + F_2(B)$, как только сумма вправо имеет смысл, то*

$$ {}_*F(x) \geqq {}_*F_1(x) + {}_*F_2(x) \quad \text{и} \quad {}^*F(x) \leqq {}^*F_1(x) + {}^*F_2(x)\,, $$

как только сумма вправо имеет смысл.

Доказательство. Пусть сумма ${}_*F_1(x) + {}_*F_2(x)$ имеет смысл и пусть ${}_*F(x) < {}_*F_1(x) + {}_*F_2(x)$. Выберем $c_i \in E$, $c_i < {}_*F_i(x)$, $i = 1, 2$ и ${}_*F(x) < c_1 + c_2$. Тогда существует последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_A$, для которой $B_n \to x$ и $\lim [F(B_n)/G(B_n)] < c_1 + c_2$. В силу 22 можно найти n_0 так, что

$$ n \geqq n_0 \Rightarrow [F_i(B_n) \geqq c_i\, G(B_n) > -\infty,\ i = 1, 2]\,. $$

Следовательно,

$$ F(B_n) = F_1(B_n) + F_2(B_n) \geqq (c_1 + c_2)\, G(B_n) $$

для всех $n \geqq n_0$. Отсюда, однако, вытекает $\lim [F(B_n)/G(B_n)] \geqq c_1 + c_2$, что и противоречит предположению.

Доказательство второго неравенства вполне аналогично.

Примечание. Если выполнены предположения предыдущей леммы и если существует $F'_1(x)$, то

$$_*F(x) = F'_1(x) + {}_*F_2(x) \quad \text{и} \quad {}^*F(x) = F'_1(x) + {}^*F_2(x),$$

как только сумма вправо имеет смысл. Доказательство этого утверждения является аналогом доказательства предыдущей леммы.

Если, кроме того, существует $F'_2(x)$ и если сумма $F'_1(x) + F'_2(x)$ имеет смысл, то существует также $F'(x)$ и $F'(x) = F'_1(x) + F'_2(x)$.

24. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$ и $f, f_i \in \mathfrak{F}(A^*)$, $i = 1, 2$. Если для всех $x \in A^*$ справедливо $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, как только сумма вправо имеет смысл, то*

$$I_I(f, A) \leqq I_I(f_1, A) + I_I(f_2, A) \quad \text{и} \quad I_S(f, A) \geqq I_S(f_1, A) + I_S(f_2, A),$$

как только сумма вправо имеет смысл.

Доказательство. Пусть $I_I(f_1, A) + I_I(f_2, A)$ имеет смысл и пусть $I_I(f, A) > I_I(f_1, A) + I_I(f_2, A)$. Тогда существуют такие $M_i \in \mathfrak{M}(f_i)$, $i = 1, 2$, что $M_1(A) + M_2(A)$ имеет смысл и $M_1(A) + M_2(A) < I_I(f, A)$. Для всех $B \in \sigma_A$ положим $M(B) = M_1(B) + M_2(B)$ или $M(B) = -\infty$, если $M_1(B) + M_2(B)$ соответственно имеет или не имеет смысла. Без затруднений проверяется, что M супераддитивна. Пусть $x \in A^*$. В силу 23 будет $_*M(x) \geqq {}_*M_1(x) + {}_*M_2(x) > -\infty$. Если $f_1(x) + f_2(x)$ имеет смысл, то $_*M(x) \geqq f_1(x) + f_2(x) = f(x)$. В противном случае либо $f_1(x) = +\infty$, либо $f_2(x) = +\infty$; итак, $_*M(x) = +\infty \geqq f(x)$. Следовательно, $M \in \mathfrak{M}(f)$. Это, однако, противоречие, так как $M(A) < I_I(f, A)$.

Переходя к функциям $-f$, $-f_i$, $i = 1, 2$ и учитывая 10 а), мы получаем второе неравенство из первого.

Примечание. До сих пор мы пользовались только предположением $\mathscr{K}_1$. Подобно этому и далее, вплоть до конца абзаца 31, мы будем пользоваться лишь предположениями $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_3$. Предположения $\mathscr{S}_1$ (исключая абзацы 16, 17) и $\mathscr{K}_2$ употребляются в первый раз, соответственно, в абзацах 32 и 36.

25. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ супераддитивна. Если $_*F(x) > -\infty$ для всех $x \in A^*$, то $F > -\infty$.*

Доказательство. Для $B \in \sigma_A$ положим $H(B) = F(B) + (+\infty) \,.\, G(B)$ или $H(B) = -\infty$, если $F(B) + (+\infty) \,.\, G(B)$ соответственно имеет или не имеет смысла. Без затруднений проверяется, что H супераддитивна и что $H(B) = -\infty$ тогда и только тогда, когда $F(B) = -\infty$. В силу 23 имеем

$$_*H(x) \geqq {}_*F(x) + {}_*[(+\infty) \,.\, G](x) = +\infty$$

для всех $x \in A^*$; итак, из $\mathscr{K}_3$ следует, что $H > -\infty$.

Примечание. В доказательстве только что приведенной леммы мы впервые употребляем аддитивность функции G. Ни в каком из предыдущих абзацев мы аддитивностью функции G не пользовались.

26. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ супераддитивна. Если $_*F(x) \geqq 0$ для всех $x \in A^*$, то $F \geqq 0$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Для $B \in \sigma_A$ положим $H(B) = F(B) + \varepsilon\, G(B)$, если $F(B) + \varepsilon\, G(B) \geqq 0$; в противном случае положим $H(B) = -\infty$. Определенная таким образом функция H супераддитивна и в силу 23 и 7 б), в) будет

$$_*(F + \varepsilon\, G)(x) \geqq {_*F(x)} + \varepsilon\, {_*G(x)} \geqq {_*F(x)} + \varepsilon > 0$$

для всех $x \in A^*$. Значит, $_*H(x) = {_*(F + \varepsilon G)}(x) > -\infty$ для всех $x \in A^*$. Поэтому в силу 25 будет $H > -\infty$ и, следовательно, $F + \varepsilon G \geqq 0$. Ввиду произвольности ε также $F \geqq 0$.

Примечание. Для функций субаддитивных справедливы леммы 25, 26 в очевидной „дуальной" формулировке. Если функция F аддитивна, то ввиду 7 б) будет $F = 0$ тогда и только тогда, когда $F'(x) \sim 0$ для всех $x \in A^*$.

27. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{F}(A^*)$. Тогда $I_S(f, A) \leqq I_I(f, A)$.*

Доказательство. Пусть $M \in \mathfrak{M}$ и $m \in \mathfrak{m}$. Разность $F = M - m$ имеет смысл, так как в силу леммы 25 и ее дуальной формулировки $M > -\infty$ и $m < +\infty$. Функция F супераддитивна и $_*F(x) \geqq {_*M(x)} - {^*m(x)} \geqq 0$. Поэтому из 26 вытекает $F \geqq 0$ и, следовательно, $m \leqq M$. Утверждение теоремы является непосредственным следствием последнего неравенства.

Следствие. Если существует $F \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{m}$, то $f \in \mathfrak{P}(A)$ и $I(f, A) = F(A)$. В этом случае число $I(f, A)$ называется *интегралом Ньютона* от функции f на множестве A.

28. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$, $c \in E$ и $f = c$ на A^*. Тогда $f \in \mathfrak{P}_E(A)$ и $I_E(f, A) = cG(A)$.*

Доказательство. Если $c \neq \pm\infty$ или $G(A) = 0$, то $cG \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{m}$ [1]) и теорема верна. Не умаляя общности, мы будем предполагать, что $c = +\infty$ и $G(A) > 0$. Тогда $m_n = nG \in \mathfrak{m}$ [1]), $n = 1, 2, \ldots$. Так как $m_n(A) \nearrow +\infty$, то из 27 вытекает

$$I_S(f, A) = I_I(f, A) = +\infty = c\, G(A)\,.$$

Примечание. Если $G(A) = 0$, то существует интеграл Ньютона $I(f, A) = 0$ для всякой функции $f \in \mathfrak{F}(A^*)$. Общей мажорантой и минорантой является здесь функция $F = 0$.

29. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$, $f_i \in \mathfrak{P}_E(A)$, $\alpha_i \in E$, $\alpha_i \neq \pm\infty$, $i = 1, 2$ и $f \in \mathfrak{F}(A^*)$. Для всех $x \in A^*$ пусть $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$, как только сумма вправо имеет смысл. Если $\alpha_1 I_E(f_1, A) + \alpha_2 I_E(f_2, A)$ имеет смысл, то $f \in \mathfrak{P}_E(A)$ и*

$$I_E(f, A) = \alpha_1 I_E(f_1, A) + \alpha_2 I_E(f_2, A)\,.$$

Если $f_i \in \mathfrak{P}(A)$, $i = 1, 2$, то $f \in \mathfrak{P}(A)$.

Теорема непосредственно вытекает из 10 б), 24 и 27.

30. Соглашение. Пусть p — целое число, $p \geqq 2$. Выберем определенное целое число i, $1 \leqq i \leqq p$, и каждому $x \in P$ поставим в соответствие множество κ_x^i, введенное в 2. Для системы множеств κ_x^i, $x \in P$, определим способом, описанным в абзацах 5, 8 и 9, производную и интеграл. Ради различения мы будем пользоваться символами A^{*i}, τ^i, ${}_*F^i$, I^i, $\mathfrak{M}^i$, $\mathfrak{P}^i$ и т.д., $i = 1, 2, \ldots, p$, значение которых несомненно.

31. Теорема. *Каждой точке $x \in P$ поставим в соответствие два множества κ_x^i, $i = 1, 2$. Пусть для множеств κ_x^1 выполнены требования $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_3$; множества κ_x^2 произвольны. Псуть $\kappa_x^1 \subset \kappa_x^2$ для всех $x \in P$. Тогда тренование $\mathscr{K}_3$ выполнено и для множеств κ_x^2, и если $A \in \sigma$, то $A^{*1} \subset A^{*2}$, $\mathfrak{P}^2(A) \subset \mathfrak{P}^1(A)$ [1]) и $I^2(f, A) = I^1(f, A)$ для каждой функции $f \in \mathfrak{P}^2(A)$.*

Доказательство. Пусть $A \in \sigma$, $f \in \mathfrak{F}(A^{*2})$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$. Очевидно, что $A^{*1} \subset A^{*2}$ и так как $\tau_x^1 \subset \tau_x^2$ для всех $x \in P$, то ${}_*F^2 \leqq {}_*F^1$ и ${}^*F^2 \geqq {}^*F^1$. Следовательно, требование $\mathscr{K}_3$ выполнено для множеств κ_x^2 и $\mathfrak{M}^2 \subset \mathfrak{M}^1$, $\mathfrak{m}^2 \subset \mathfrak{m}^1$. Отсюда в силу 27 и примечания к лемме 24 вытекает неравенство

$$I_S^2(f, A) \leqq I_S^1(f, A) \leqq I_I^1(f, A) \leqq I_I^2(f, A)\,,$$

тривиальным следствием которого являются оставшиеся утверждения теоремы.

32. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ супераддитивна. Если $F > -\infty$ и $F(A) < +\infty$, то $F < +\infty$. Если $F \geqq 0$, то $F \leqq F(A)$.*

Лемма является простым следствием предположения $\mathscr{S}_1$.

33. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{F}(A^*)$. Если $I_I(f, A) < +\infty$, то $I_I(f) < +\infty$.*

Доказательство. Если $I_I(f, A) < +\infty$, то существует $M \in \mathfrak{M}(A)$, $M(A) < +\infty$. Из 25 и 32 вытекает, что $M < +\infty$. Однако, в силу 8 б) имеем $I_I(f) \leqq M$.

34. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$. Тогда $\mathfrak{P}(A) \subset \mathfrak{P}(B)$ [1]) для всякого множества $B \in \sigma_A$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{P}(A)$, $B \in \sigma_A$ и $\varepsilon > 0$. Очевидно, существуют такие $M \in \mathfrak{M}(A)$ и $m \in \mathfrak{m}(A)$, что $M(A) - m(A) < \varepsilon$. Так как функция $M - m$ неотрицательна и супераддитивна, то из 27, 8 б) и 32 вытекает

$$0 \leqq I_I(f, B) - I_S(f, B) \leqq M(B) - m(B) \leqq M(A) - m(A) < \varepsilon\,.$$

Ввиду произвольности ε теорема доказана.

Примечание. Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{P}(A)$. На основе предыдущей теоремы можно соотношением $F(B) = I(f, B)$, $B \in \sigma_A$, определить функцию $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$, которую мы будем называть *неопределенным интегралом* от функции f на множестве A. Обозначим ее через $I(f)$. Из 11 вытекает, что функция $I(f)$ аддитивна.

35. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$, $f \in \mathfrak{P}(A)$ и $x \in P$. Пусть, далее, $\{B_n\} \subset \sigma_A$ — такая последовательность попарно непересекающихся множеств, что $B_n \to x$ и что* *соединение любого конечного числа множеств этой последовательности принадлежит σ. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} I(f, B_n)$ абсолютно сходится.*

Доказательство. Пусть утверждение теоремы неверно. Тогда, не умаляя общности, можем предполагать, что существует подпоследовательность $\{C_n\}$ последовательности $\{B_n\}$, для которой $\sum_{n=1}^{\infty} I(f, C_n) = -\infty$. Так как $f \in \mathfrak{P}(A)$, то существует $M \in \mathfrak{M}(f, A)$, $M(A) < +\infty$. Из 8 б), 25 и 32 вытекает, что $H = M - I(f)$ есть конечная неотрицательная супераддитивная функция. Пусть $c < \min [{}_*M(x), 0]$. В силу $\mathscr{K}_1$ и 22 найдется такое n_1, что для $n \geqq n_1$ будет $M(C_n) \geqq c\, G(C_n)$ и, следовательно, $H(C_n) \geqq c\, G(C_n) - I(f, C_n)$. Далее найдется $n_2 \geqq n_1$, для которого $\sum_{n=n_1}^{n_2} I(f, C_n) < c\, G(A) - H(A)$. Если мы положим $C = \bigcup_{n=n_1}^{n_2} C_n$, то $C \in \sigma_A$ и в силу 32 имеем

$$H(A) \geqq H(C) \geqq \sum_{n=n_1}^{n_2} H(C_n) \geqq c \sum_{n=n_1}^{n_2} G(C_n) - \sum_{n=n_1}^{n_2} I(f, C_n) >$$
$$> c\, G(C) - c\, G(A) + H(A) \geqq H(A)\,.$$

Это, однако, противоречие.

36. Лемма. *Если $A_1, A_2, A_1 \cup A_2 \in \sigma$, то $(A_1 \cup A_2)^* = A_1^* \cup A_2^*$.*

Доказателство. Очевидно, $A_1^* \cup A_2^* \subset (A_1 \cup A_2)^*$. Пусть $x \in (A_1 \cup A_2)^*$, $\{B_n\} \subset \sigma_{A_1 \cup A_2}$ и пусть $B_n \to x$. Если $A_1 \cap B_n \neq \emptyset$ лишь для конечного числа индексов n, то с определенного n_0 начиная $B_n \in \sigma_{A_2}$. Итак, в силу $\mathscr{K}_1$ будет $x \in A_2^*$. Следовательно, не умаляя общности, мы можем в силу $\mathscr{K}_1$ предполагать, что $A_1 \cap B_n \neq \emptyset$ для всех n. Тогда из 16 и $\mathscr{K}_2$ вытекает, что $\{A_1 \cap B_n\} \subset \sigma_{A_1}$ и $A_1 \cap B_n \to x$. Значит, $x \in A_1^*$.

37. Лемма. *Пусть $A_1, A_2, A_1 \cup A_2 \in \sigma$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_{A_1 \cup A_2})$ супераддитивна. Если $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то*

$${}_*F(A_1 \cup A_2) = \min [{}_*F(A_1), {}_*F(A_2)]\,.$$

Доказательство. Пусть $x \in P$. Обозначим $a_i = {}_*F(x, A_i)$, $i = 1, 2$ и $a = {}_*F(x, A_1 \cup A_2)$. В силу 7 г) будет $a \leqq \min (a_1, a_2)$. Предположим, что $a < \min (a_1, a_2)$ и выберем $b \in E$, $a < b < \min (a_1, a_2)$. Тогда существует $\{B_n\} \subset \sigma_{A_1 \cup A_2}$, для которой $B_n \to x$ и $\lim [F(B_n)/G(B_n)] = t < b$. Если $A_1 \cap B_n \neq \emptyset$ лишь для конечного числа индексов n, то с определенного n_0 начиная $B_n \in \sigma_{A_2}$. Итак, в силу $\mathscr{K}_1$, $a_2 \leqq t < b < a_2$, что и есть противоречие. Следовательно, не умаляя общности, мы можем в силу $\mathscr{K}_1$ предполагать, что $B_n^i = A_i \cap B_n \neq \emptyset$, $n = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2$. Тогда из 16 и $\mathscr{K}_2$ вытекает, что $\{B_n^i\} \subset \sigma_{A_i}$ и $B_n^i \to x$. Учитывая теперь 22, мы получим, что для достаточно больших индексов n имеет место

$$F(B_n^i) \geqq b\, G(B_n^i)\,, \quad i = 1, 2$$

и, следовательно, в силу супераддитивности функции F и аддитивности функции G (см. 4) будет

$$F(B_n) \geqq F(B_n^1) + F(B_n^2) \geqq b[G(B_n^1) + G(B_n^2)] = b\, G(B_n).$$

Из последнего неравенства однако легко вытекает, что $t \geqq b$. Это противоречие.

38. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{F}(A^*)$. Тогда функции $I_I(f)$ и $I_S(f)$ аддитивны.*

Доказательство. Достаточно доказать аддитивность $I_I(f)$. Однако, в силу 11 достаточно доказать лишь субаддитивность $I_I(f)$. Пусть $B_1, B_2 \in \sigma_A$, $B = B_1 \cup B_2 \in \sigma_A$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ и пусть $I_I(f, B_1) + I_I(f, B_2)$ имеет смысл. Выберем $M_i \in \mathfrak{M}(B_i)$ и для $C \in \sigma_B$ положим $\widetilde{M}_i(C) = M_i(C \cap B_i)$, если $C \cap B_i \neq \emptyset$, и $\widetilde{M}_i(C) = 0$, если $C \cap B_i = \emptyset$. Положим, далее, $M = \widetilde{M}_1 + \widetilde{M}_2$. Без затруднений проверится, что функции $\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2$ и, следовательно, также M супераддитивны. Так как $M(C) = \widetilde{M}_i(C) = M_i(C)$ для всякого $C \in \sigma_{B_i}$, $i = 1, 2$, то, используя 37, мы получим

$$_*M(B) = \min\left[{}_*M(B_1),\ {}_*M(B_2)\right] = \min\left[{}_*M_1(B_1),\ {}_*M_2(B_2)\right].$$

Из этого равенста в силу 7 а) вытекает, что $M \in \mathfrak{M}(B)$; итак,

$$I_I(f, B) \leqq M(B) = \widetilde{M}_1(B) + \widetilde{M}_2(B) = M_1(B_1) + M_2(B_2).$$

Следовательно, учитывая произвольность мажорант M_1, M_2, имеем

$$I_I(f, B) \leqq I_I(f, B_1) + I_I(f, B_2).$$

39. Несколько утверждений. В этом абзаце приведем без доказательства некоторые важные свойства интеграла. Доказательства этих свойств подобны доказательствам аналогичных утверждений, содержащихся в [4] II, 63–73. Читатель может их без особого труда доказать сам на основе приведенного образца.

а) *Пусть $A \in \sigma$ и $f, g \in \mathfrak{P}(A)$. Тогда $f^+, f^-, |f| \in \mathfrak{P}_E(A)$, $\max(f, g) \in \mathfrak{P}_E(A)$ и $\min(f, g) \in \mathfrak{P}_E(A)$. Если $f, g \in \mathfrak{P}_0(A)$, то также $f^+, f^-, |f| \in \mathfrak{P}_0(A)$, $\max(f, g) \in \mathfrak{P}_0(A)$ и $\min(f, g) \in \mathfrak{P}_0(A)$.*

б) *Пусть $A \in \sigma$ и $f_n, f \in \mathfrak{F}(A^*)$, $n = 1, 2, \ldots$. Если $f_n \nearrow f$ и $I_I(f_1, A) > -\infty$, то $I_I(f_n, A) \nearrow I_I(f, A)$.*

в) *Пусть $A \in \sigma$ и $f_n \in \mathfrak{F}(A^*)$, $n = 1, 2, \ldots$. Если $I_I(\inf f_n, A) > -\infty$, то*

$$I_I(\liminf f_n, A) \leqq \liminf I_I(f_n, A).$$

г) *Пусть $A \in \sigma$, $g, h, f_n \in \mathfrak{P}(A)$ и пусть $g \leqq f_n \leqq h$, $n = 1, 2, \ldots$. Если существует $\lim f_n$, то $\lim f_n \in \mathfrak{P}(A)$ и*

$$I(\lim f_n, A) = \lim I(f_n, A).$$

д) *Пусть $A \in \sigma$, $f_n \in \mathfrak{P}_E(A)$, $n = 1, 2, \ldots$ и $f \in \mathfrak{F}(A^*)$. Если $f_n \nearrow f$ и $I_E(f_1, A) > -\infty$, то $f \in \mathfrak{P}_E(A)$ и $I_E(f_n, A) \nearrow I_E(f, A)$.*

40. Лемма. *Пусть* $A \in \sigma$, $f \in \mathfrak{P}(A) - \mathfrak{P}_0(A)$ *и* $M \in \mathfrak{M}(f, A)$. *Если* $M(A) < +\infty$, *то* $\inf\limits_{x \in A^*} {}_*M(x) = -\infty$.

Доказательство. Предположим, что $\inf\limits_{x \in A^*} {}_*M(x) > -\infty$ и выберем $c \leqq \leqq \min [\inf\limits_{x \in A^*} {}_*M(x), 0]$. Функция $M_1 = M - cG$ супераддитивна и для всех $x \in A^*$ имеем

$$ {}_*M_1(x) \geqq {}_*M(x) - c \geqq \max [f(x), 0] = f^+(x) > -\infty . $$

Следовательно, $M_1 \in \mathfrak{M}(f^+)$. Так как в силу 39 а) имеем $f^+ \in \mathfrak{P}_E(A)$ и

$$ 0 \leqq I_E(f^+, A) \leqq M_1(A) = M(A) - c\, G(A) < +\infty , $$

то $f^+ \in \mathfrak{P}(A)$. Из 29 вытекает, что также $|f| \in \mathfrak{P}(A)$, потому что $|f(x)| = 2f^+(x) - - f(x)$, как только правая часть имеет смысл. Это, однако, противоречит предположениям.

41. Теорема. *Если выполнены требования абзаца 15, то* $\mathfrak{P}(A) = \mathfrak{P}_0(A)$ *для всякого множества* $A \in \sigma$.

Теорема сразу вытекает из 17, 20 и 40.

42. Соглашение. В абзацах 42—56 мы будем предполагать, что кроме требований $\mathscr{S}_1$ и $\mathscr{K}_1 - \mathscr{K}_3$ выполнены также требования $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{K}_4$.

Примечание. Из предположений $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{K}_4$ непосредственно вытекает, что всякая последовательность $\{B_n\} \subset \sigma$ сходится не более чем к одной точке $x \in P$.

43. Теорема. *Для каждого* $A \in \sigma$ имеем $A^* = \bar{A}$.

Доказательство. Из $\mathscr{K}_4$ непосредственно следует, что $A^* \subset \bar{A}$. Пусть существует $x \in \bar{A} - A^*$. Для $B \in \sigma_A$ положим $F(B) = -\infty$, если $x \in \bar{B}$, и $F(B) = = +\infty$, если $x \notin \bar{B}$. Тогда F аддитивна и $F(A) = -\infty$. Выберем $y \in A^*$ и $\{B_n\} \subset \subset \sigma_A$, $B_n \to y$. Так как $y \neq x$ и P — пространство Хаусдорфа, то из $\mathscr{K}_4$ вытекает, что начиная с определенного n_0 будет $x \notin \bar{B}_n$ и, следовательно, $F(B_n) = = +\infty$. Значит, ${}_*F(y) = +\infty$ для всех $y \in A^*$, что противоречит $\mathscr{K}_3$.

44. Теорема. *Если* $A \in \sigma$, *то* $\bar{A}$ *компактно.*

Доказательство. Для $B \in \sigma_A$ мы положим $F(B) = +\infty$, если $\bar{B}$ компактно, и $F(B) = -\infty$ в противном случае. Легко проверяется, что определенная таким образом функция F аддитивна. Пусть $x \in P$, $\{B_n\} \subset \sigma_A$ и $B_n \to x$. Из $\mathscr{P}_1$ вытекает, что существует компактная окрестность U точки x. В силу $\mathscr{K}_4$, начиная с определенного n_0, $B_n \subset U$ и, следовательно, $F(B_n) = +\infty$. Значит, ${}_*F(x) = +\infty$ для всех $x \in P$. Из $\mathscr{K}_3$ вытекает, что $F(A) > -\infty$. Итак, по определению функции F множество $\bar{A}$ компактно.

Примечание. Для доказательства теорем 43, 44 мы употребляли лишь предположения $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{K}_3$, и $\mathscr{K}_4$.

45. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$, $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$ и $x \in \bar{A}$. Если положим $F = I_I(f)$, то $F'(x) \sim \sim f(x)$, как только функция f непрерывна в точке x.*

Доказательство. Лемма очевидно верна, если $\tau_x(F) = \emptyset$. Пусть, следовательно, существует такая последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_A$, что $B_n \to x$ и $F(B_n)/G(B_n) \to t$. Положим $\omega_n = \inf_{x \in B_n} f(x)$ и $\Omega_n = \sup_{x \in B_n} f(x)$. Из 10 в) и 28 вытекает

$$\omega_n\, G(B_n) \leqq F(B_n) \leqq \Omega_n\, G(B_n)\,.$$

Так как частное $F(B_n)/G(B_n)$ имеет смысл, то $G(B_n) > 0$, и делением последнего неравенства на $G(B_n)$ мы получим

$$\omega_n \leqq F(B_n)/G(B_n) \leqq \Omega_n\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Если теперь функция f непрерывна в точке x, то, учитывая $\mathscr{K}_4$, имеем $\lim \omega_n = \lim \Omega_n = f(x)$. Значит, $t = f(x)$, и лемма верна в силу 7 а).

46. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Если функция f конечна и непрерывна, то существует интеграл Ньютона $I(f, A)$.*

Теорема непосредственно вытекает из следствия теоремы 27, так как в силу 38 и 45 имеем $I_I(f) \in \mathfrak{M}(f, A) \cap \mathfrak{m}(f, A)$.

47. Некоторые обозначения. Пусть $\mathfrak{B}$ – система всех *множеств Бореля* пространства P (см. [2] § 51). Через $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{C}$ мы обозначим соответственно класс всех *открытых* множеств системы $\mathfrak{B}$ и класс всех *компактных* множеств пространства P. Если μ – *регулярная борелевская мера* (см. [2] § 52), заданная на системе $\mathfrak{B}$, то по определению регулярности для каждого множества $B \in \mathfrak{B}$ выполнены равенства:

$$\mu(B) = \inf\{\mu(U) : B \subset U \in \mathfrak{G}\} = \sup\{\mu(C) : B \supset C \in \mathfrak{C}\}\,.$$

Следовательно, к множеству $B \in \mathfrak{B}$ существуют такие множества U и C, имеющие соответственно тип F_σ и G_δ, что $C \subset B \subset U$ и $\mu(B) = \mu(U) = \mu(C)$.

Пусть $A \in \mathfrak{B}$ и $f \in \mathfrak{F}(A)$. Через $\int_A f\,\mathrm{d}\mu$ мы обозначим *интеграл Лебега* от функции f на множестве A по мере μ – если он, конечно, существует. Так как в дальнейшем мы будем пользоваться лишь одной определенной мерой μ, то не возникнет недоразумение, если вместо $\int_A f\,\mathrm{d}\mu$ будем писать только $\int_A f$. Систему всех *борелевских*, т.е. *$\mathfrak{B}$–измеримых*, *функций* $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$, для которых существует конечный интеграл $\int_A f$, мы обозначим $\mathfrak{L}(A)$.

Если $X \subset P$, то χ_X означает *характеристическую функцию* множества X.

48. Соглашение. В абзацах 48–56 и 60–63 мы будем предполагать, что $\sigma \subset \mathfrak{B}$ и что на системе $\mathfrak{B}$ задана определенная регулярная борелевская мера μ, которая на системе σ совпадает с функцией G, определенной в 4. Т.е. требуется, чтобы $\mu(A) = G(A)$ для всякого множества $A \in \sigma$.

Примечание. Читателю советуется сразу прочитать примечание к теореме 63.

49. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Если функция f конечна и непрерывна, то $I(f, A) = \int_A f$.*

Доказательство. Одинаковым способом как и в 45 докажется, что неопределенный интеграл Лебега $\int f$ является общей мажорантой и минорантой функции f на множестве A и используется следствие теоремы 27.

Примечание. Для верности только что приведенной леммы неважно, что мера μ регулярна.

50. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$ и $B \in \mathfrak{B}$. Если $\mu(B) = 0$, то какого бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такая аддитивная функция $F_{B,\varepsilon} \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$, что $0 \leqq F_{B,\varepsilon} \leqq \varepsilon$ и ${}_*F_{B,\varepsilon}(x, A) = +\infty$ для всех $x \in B$.*

Доказательство. В силу 47, 48 существуют такие множества $U_n \in \mathfrak{G}$, что $B \subset U_n$ и $\mu(U_n) \leqq \varepsilon/2^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Положим $F_n(C) = \mu(C \cap U_n)$ для $C \in \sigma_A$ и $F_{B,\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$. Очевидно, $F_{B,\varepsilon}$ аддитивна и $0 \leqq F_{B,\varepsilon} \leqq \varepsilon$. Пусть теперь $x \in B$, $\{C_k\} \subset \sigma_A$ и $C_k \to x$. Из $\mathscr{K}_4$ вытекает: для каждого n найдется такое k_n, что для всех $k \geqq k_n$ будет $C_k \subset U_n$ и, следовательно, $F_n(C_k) = \mu(C_k)$. Значит, ${}_*F_n(x) \geqq \geqq 1$, $n = 1, 2, \ldots$. В силу 23 и 7e) мы заключаем ${}_*F_{B,\varepsilon}(x) \geqq \sum_{n=1}^{\infty} {}_*F_n(x) = +\infty$.

51. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$ и $f, g \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Если $f = g$ почти всюду, то*

$$I_I(f, A) = I_I(g, A) \quad \text{и} \quad I_S(f, A) = I_S(g, A)\,.$$

Доказательство. Пусть $I_I(f, A) < I_I(g, A)$. Тогда существует такая $M \in \in \mathfrak{M}(f)$, что $M(A) < I_I(g, A)$. Выберем положительное число $\varepsilon < I_I(g, A) - M(A)$ и положим $B = \{x \in \bar{A} : f(x) \neq g(x)\}$, $M_1 = M + F_{B,\varepsilon}$ (см. 50). Без особого труда проверяется, что $M_1 \in \mathfrak{M}(g)$. Это, однако, противоречие, потому что $M_1(A) \leqq M(A) + \varepsilon < I_I(g, A)$. Следовательно, $I_I(f, A) \geqq I_I(g, A)$. Обратное неравенство вытекает из симметрии отношения „$f = g$ почти всюду".

Применяя только что доказанное утверждение для функций $-f$, $-g$, мы в силу 10a) получим, что также $I_S(f, A) = I_S(g, A)$.

Примечание. Интересно, что в доказательстве утверждений 50, 51 мы употребляли лишь предположения $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{K}_4$.

52. Лемма. *Если $A \in \sigma$ и $B \in \mathfrak{C}$, то $\chi_B \in \mathfrak{P}(A)$ [1]) и $I(\chi_B, A) = \int_A \chi_B$.*

Доказательство. В силу 47 существуют такие множества $U_n \in \mathfrak{G}$, $n = = 1, 2, \ldots$, что если мы положим $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, то $B \subset U$ и $\mu(B) = \mu(U)$. Не умаляя общности, мы можем предполагать, что множества U_n образуют убывающую последовательность. Из [2] § 50, теорема B, вытекает, что можно найти непрерывные функции $f_n \in \mathfrak{F}(P)$, для которых $0 \leqq f_n \leqq 1$, $f_n(x) = 1$, если $x \in B$, и $f_n(x) = 0$, если $x \in P - U_n$. Так как $f_n \in \mathfrak{P}(A)$, $I(f_n, A) = \int_A f_n$ (см. 49) и $f_n \to \chi_B$ почти всюду, то в силу 28, 39 г) и 51 будет $\chi_B \in \mathfrak{P}(A)$, причем

$$I(\chi_B, A) = \lim I(f_n, A) = \lim \int_A f_n = \int_A \chi_B .$$

53. Лемма. *Если $A \in \sigma$ и $B \in \mathfrak{B}$, то $\chi_B \in \mathfrak{P}(A)$ [1]) и $I(\chi_B, A) = \int_A \chi_B$.*

Доказательство. В силу 47 существуют такие множества $C_n \in \mathfrak{C}$, что если мы положим $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, то $C \subset B$ и $\mu(B) = \mu(C)$. Не умаляя общности, мы можем предполагать, что множества C_n образуют возрастающую последовательность. Тогда $\chi_{C_n} \to \chi_B$ почти всюду. Из 28, 52, 39 г) и 51 вытекает, что $\chi_B \in \mathfrak{P}(A)$, причем

$$I(\chi_B, A) = \lim I(\chi_{C_n}, A) = \lim \int_A \chi_{C_n} = \int_A \chi_B .$$

Следствие. Пусть $A \in \sigma$. Из предыдущей леммы и теоремы 29 вытекает, что если f – $\mathfrak{B}$-простая функция (см. [2] § 20), то $f \in \mathfrak{P}(A)$ [1]) и $I(f, A) = \int_A f$.

54. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$ и $f, g \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Если $f(x) = g(x)$ для всех $x \in A$, то*

$$I_I(f, A) = I_I(g, A) \quad и \quad I_S(f, A) = I_S(g, A).$$

Доказательство. Из 44 вытекает, что $\bar{A} \in \mathfrak{C}$. Положим $h = (+\infty) \cdot \chi_{\bar{A}-A}$. Так как $n\chi_{\bar{A}-A} \in \mathfrak{P}(A)$ и $I(n\chi_{\bar{A}-A}, A) = n \int_A \chi_{\bar{A}-A} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ (см. 53), то в силу 39 д) будет $h \in \mathfrak{P}(A)$ и $I(h, A) = 0$. Очевидно,

$$f(x) - h(x) \leqq g(x) \leqq f(x) + h(x)\,, \quad g(x) - h(x) \leqq f(x) \leqq g(x) + h(x)\,,$$

как только суммы вправо и разности влево имеют смысл. Интегрируя эти неравенства и применяя 10 в) и 24, мы получим доказываемые отношения.

55. Определение. Пусть $A \in \sigma$ и пусть f функция, определенная почти всюду в A. Пусть, далее, $g \in \mathfrak{F}(\bar{A})$ – такая функция, что $g(x) = f(x)$, как только $f(x)$ определено. Числа $I_I(g, A)$ и $I_S(g, A)$ называются соответственно *верхним и нижним интегралом* от функции f на множестве A и обозначаются соответственно через $I_I(f, A)$ и $I_S(f, A)$. Символы $I_E(f, A)$ и $I(f, A)$ тогда определяются вполне аналогично как в 9.

Примечание. Теоремы 51 и 54 показывают, что значения $I_I(f, A)$ и $I_S(f, A)$ не зависят от выбора функции g. Следовательно, предыдущее определение корректно и не противоречит определению 9. Для интеграла, определенного в этом абзаце, справедливы все утверждения, приведенные в предлагаемой статье.

56. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$. Тогда $\mathfrak{L}(A) \subset \mathfrak{P}_0(A)$ и $I(f, A) = \int_A f$ для каждой функции $f \in \mathfrak{L}(A)$.*

Доказательство. Выберем $f \in \mathfrak{L}(A)$ и предположим сначала, что $f \geqq 0$. В силу [2] § 20, теорема B существуют такие неотрицательные $\mathfrak{B}$-простые функции f_n, $n = 1, 2, \ldots$, что $f_n \nearrow f$ [1]). Из следствия леммы 53 и 39 д) вытекает

$$I_E(f, A) = \lim I(f_n, A) = \lim \int_A f_n = \int_A f \neq \pm\infty .$$

Значит, $f \in \mathfrak{P}_0(A)$. Если $f \in \mathfrak{L}(A)$ произвольна, то, применяя только что доказанное для функций f^+, f^-, достаточно использовать 29.

57. Проблема. Опустим требование регулярности борелевской меры μ, введенной в 48. Будут ли тогда справедливы теоремы 51, 54 и 56?

Примечание. Так как мера Бэра всегда регулярна (см .[2] § 51 и § 52, теорема G), то для решения предложенной проблемы надо заняться топологическими пространствами, содержащими компактное множество, неявляющееся G_δ множеством (см., напр. [1] гл. 2, § 11).

58. Обозначение. Пусть выполнены требования $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{S}_3$. Тогда для каждого множества $A \in \sigma$ и каждого натурального числа n мы обозначим $\mathfrak{K}_n^A = \{K \in \mathfrak{K}_n : A \cap K \neq \emptyset\}$, где $\mathfrak{K}_n$ — локально конечное непересекающееся покрытие пространства P, постулированное в предположении $\mathscr{S}_3$.

Примечание. Сразу видно, что если кроме $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{S}_3$ выполнено также $\mathscr{S}_2$, то для всякого $A \in \sigma$ системы $\mathfrak{K}_n^A$, $n = 1, 2, \ldots$, конечны.

59. Теорема. *Если выполнены требования $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{S}_1 - \mathscr{S}_3$, $\mathscr{K}_2$ и $\mathscr{K}'_3$, то выполнено также требование $\mathscr{K}_3$.*

Доказательство. Пусть имеют место $\mathscr{P}_1, \mathscr{S}_1 - \mathscr{S}_3, \mathscr{K}_2$ и $\mathscr{K}'_3$. Пусть, далее, $A \in \sigma$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ — такая супераддитивная функция, что ${}_*F(x, A) > -\infty$ для всех $x \in A^*$. Предположим, что существует $B \in \sigma_A$, для которого $F(B) = -\infty$. В силу 58 образуют множества $B \cap K$, где $K \in \mathfrak{K}_1^B$, конечное непересекающееся покрытие множества B. Из $\mathscr{S}_1$ и супераддитивности функции F вытекает, что

$$-\infty = F(B) \geqq \sum F(B \cap K) \quad (K \in \mathfrak{K}_1^B),$$

как только сумма вправо имеет смысл. Следовательно, существует $K_1 \in \mathfrak{K}_1^B$, для которого $F(B \cap K_1) = -\infty$. Подобно найдется такое $K_2 \in \mathfrak{K}_2^{B \cap K_1} \subset \mathfrak{K}_2^B$, что $F(B \cap K_2) = -\infty$ (в самом деле, $K_2 \subset K_1$; итак, $B \cap K_2 = B \cap K_1 \cap K_2$). Продолжая этот процесс, мы индукцией построим убывающую последовательность $\{K_n\}$, для которой $K_n \in \mathfrak{K}_n^B$ и $F(B \cap K_n) = -\infty$, $n = 1, 2, \ldots$. В силу $\mathscr{K}'_3$ существует такое $x \in P$, что $K_n \to x$. Из $\mathscr{S}_1$ и $\mathscr{K}_2$ вытекает, что также $B \cap K_n \to x$. Следовательно, $x \in A^*$ и ${}_*F(x) = -\infty$. Это противоречие.

Примечание. Из доказательства предыдущей теоремы вытекает следующее утверждение:

Пусть выполнено $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{S}_1 - \mathscr{S}_3$, пусть $A \in \sigma$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ супераддитивна. Если $F(A) = -\infty$, то существуют такие $K_n \in \mathfrak{K}_n$, что $K_{n+1} \subset K_n$, $K_n \cap A \in \sigma$ и $F(K_n \cap A) = -\infty$, $n = 1, 2, \ldots$.

60. Соглашение. В абзацах 60–63 мы будем предполагать, что выполнены требования $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{S}_1 - \mathscr{S}_3$, $\mathscr{K}_1$, $\mathscr{K}_2$, $\mathscr{K}'_3$ и $\mathscr{K}_4$.

Примечание. В силу теоремы 59 будет выполнено и требование $\mathscr{K}_3$. Значит, при только что приведенных предположениях имеют место все утверждения абзацев 1–11, 22–40 и 42–56.

61. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$, $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$ и $c \in E$. Если $f \geqq c > -\infty$ и $I_I(f, A) < +\infty$, то каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такая функция $g \in \mathfrak{L}(A)$, что*

$$g \geqq f \quad \text{и} \quad \int_A g < I_I(f, A) + \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{K}_n^A = \{K_i^n\}_i$. Для всех $K_i^n \in \mathfrak{K}_n^A$ мы положим $A_i^n = A \cap K_i^n$. Из 58 и $\mathscr{S}_1$ вытекает, что $\{A_i^n\} \subset \sigma_A$, $n = 1, 2, \ldots$, суть конечные непересекающиеся покрытия множества A. Выберем $\varepsilon > 0$ и такое $M \in \mathfrak{M}(f, A)$, чтобы $M(A) < I_I(f, A) + \varepsilon$. Положим $v(A_i^n) = M(A_i^n)/\mu(A_i^n)$, если частное $M(A_i^n)/\mu(A_i^n)$ имеет смысл, и $v(A_i^n) = +\infty$ в противном случае. Легко проверится, что $v(A_i^n) > -\infty$. Следовательно, можно определить измеримые снизу ограниченные функции

$$f_n = (+\infty) \cdot \chi_{\bar{A}-A} + \sum_i v(A_i^n)\, \chi_{A_i^n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда

$$-\infty < \int_{A_j^n} f_n = (+\infty) \int_{A_j^n} \chi_{\bar{A}-A} + \sum_i v(A_i^n) \int_{A_j^n} \chi_{A_i^n} = v(A_j^n)\, \mu(A_j^n) \leqq M(A_j^n).$$

В самом деле это ясно, если $\mu(A_j^n) > 0$; если $\mu(A_j^n) = 0$, то $M(A_j^n) \geqq I_I(f, A_j^n) = 0 = \int_{A_j^n} f_n$. Отсюда вытекает

$$-\infty < \int_A f_n = \sum_j \int_{A_j^n} f_n \leqq \sum_j M(A_j^n) \leqq M(A) < +\infty .$$

Значит, $f_n \in \mathfrak{L}(A)$. Если мы положим $g = \liminf f_n$, то функция g измерима и $g(x) = +\infty \geqq f(x)$ для всех $x \in \bar{A} - A$. Выберем определенную точку $x \in A$ и множество A_i^n, содержащее эту точку, обозначим через A_n, $n = 1, 2, \ldots$. Из $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{K}'_3$, $\mathscr{K}_2$ и $\mathscr{K}_4$ вытекает, что $A_n \to x$. Итак, в силу $\mathscr{K}_1$ будет

$$g(x) = \liminf f_n(x) = \liminf v(A_n) \geqq {}_*M(x, A) \geqq f(x) .$$

Следовательно, $g \geqq f \geqq c$ и

$$-\infty < \int_A g \leqq \liminf \int_A f_n \leqq M(A) < I_I(f, A) + \varepsilon < +\infty .$$

Последнее неравенство одновременно показывает, что $g \in \mathfrak{L}(A)$.

Следствие. Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{P}(A)$ ограничена. Тогда каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существуют такие функции $g, h \in \mathfrak{L}(A)$, что $h \leqq f \leqq g$ и $\int_A (g - h) < \varepsilon$.

62. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$. Если функция $f \in \mathfrak{P}(A)$ ограничена, то $f \in \mathfrak{L}(A)$.*

Доказательство. В силу следствия леммы 61, существуют такие функции $g_n, h_n \in \mathfrak{L}(A)$, что $h_n \leqq f \leqq g_n$ и $\int_A (g_n - h_n) < 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$. Положим $g = \inf g_n$ и $h = \sup h_n$. Тогда $g, h \in \mathfrak{L}(A)$, $h \leqq f \leqq g$ и $\int_A (g - h) \leqq \inf \int_A (g_n - h_n) = 0$. Следовательно, $g = h = f$ почти всюду; итак, $f \in \mathfrak{L}(A)$.

63. Теорема. *Если $A \in \sigma$, то $\mathfrak{P}_0(A) = \mathfrak{L}(A)$.*

Доказательство. Учитывая теорему 56, нам достаточно доказать лишь соотношение $\mathfrak{P}_0(A) \subset \mathfrak{L}(A)$. Выберем $f \in \mathfrak{P}_0(A)$ и предположим сначала, что $f \geqq 0$. В силу 28 и 39 а) будет $f_n = \min(f, n) \in \mathfrak{P}_0(A)$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как функции f_n ограничены, то $f_n \in \mathfrak{L}(A)$ и $\int_A f_n = I(f_n, A)$ (см. 62, 56). Так как $f_n \nearrow f$, то из 39 д) вытекает

$$\int_A f = \lim \int_A f_n = \lim I(f_n, A) = I(f, A) \neq \pm\infty .$$

Следовательно, $f \in \mathfrak{L}(A)$. Если $f \in \mathfrak{P}_0(A)$ произвольна, то, используя 39 а), достаточно применить только что доказанное для функций f^+, f^-.

Примечание. Без всяких затруднений проверится, что все утверждения абзацев 48—56 и 60—63 будут справедливы и в том случае, если вместо регулярной борелевской меры μ, определенной на системе $\mathfrak{B}$, мы будем пользоваться ее *пополнением* $\bar{\mu}$, определенным на системе $\bar{\mathfrak{B}}$ (см. [2] § 13). Это мы употребим в следующих шести абзацах, где проиллюстрируем до сих пор излагаемую теорию примером в r-мерном евклидовом пространстве. Мерой $\bar{\mu}$ здесь будет лебеговская мера, определенная на системе $\bar{\mathfrak{B}}$ всех множеств, измеримых в смысле Лебега.

64. Некоторые обозначения. Пусть $r \geqq 1$ — определенное целое число. Через E_r мы обозначим *r-мерное евклидово пространство* и через μ *лебеговскую меру* в E_r. Скажем, что множества $A, B \subset E_r$ *эквивалентны* и пишем $A \doteq B$, если $\mu[(A - B) \cup (B - A)] = 0$.

Если $A \subset E_r$ ограничено и измеримо, то число $\|A\|$, определенное в [5] 2, мы назовем *поверхностью* множества A. $\mathfrak{A}$ будет система всех ограниченных измеримых множеств $A \subset E_r$, для которых $\|A\| < +\infty$. Строго говоря, в статье [5] число $\|A\|$ и система $\mathfrak{A}$ определяются лишь тогда, когда $r > 1$. Однако из упомянутой статьи вытекает, что если $r = 1$, то естественно определить $\mathfrak{A}$ как систему всех ограниченных множеств $A \subset E_1$, для которых существуют целое число $l \geqq 0$ и такие действительные числа $a_1 < b_1 < \ldots < a_l < b_l$, что $A \doteq \bigcup_{i=1}^{l} (a_i, b_i)$, и положить $\|A\| = 2l$ (см. [5] 33).

Через $\mathfrak{K}$ мы обозначим систему всех *интервалов* вида $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{r} \langle a_j, b_j)$ [2]), где a_j, b_j — действительные числа, $a_j < b_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Из [5] 20 вытекает, что $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{A}$.

65. Соглашение. Вплоть до конца этой статьи мы будем предполагать, что $P = E_r$, $\mathfrak{K} \subset \sigma \subset \mathfrak{A}$ и что система σ удовлетворяет требованию $\mathscr{S}_1$. В абзацах 65—69 мы будем далее предполагать, что $G = \mu$ [1]), где μ — лебеговская мера в E_r, и что каждому $x \in E_r$ поставлены в соответствие множества

$$\kappa_x^1 = \{\{B_n\} \subset \sigma : d(B_n \cup \{x\}) \to 0\}\ ^{3)}, \quad \kappa_x^2 = \{\{B_n\} \in \kappa_x^1 : \sup \|B_n\| < +\infty\}$$

и если $r > 1$, также множество $\kappa_x^3 = \{\{B_n\} \in \kappa_x^1 : \|B_n\| \to 0\}$.

66. Несколько примечаний. а) В силу [5] 35 мы можем положить прямо $\sigma = \{A \in \mathfrak{A} : A \neq \emptyset\}$.

б) Пространство P и система σ удовлетворяют, очевидно, предположениям $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$ и $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$.

в) Ясно, что множества κ_x^i, $i = 1, 2, 3$ удовлетворяют требованиям $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_4$. Требование $\mathscr{K}_2$, очевидно, выполнено для множеств κ_x^1. Для множеств κ_x^2 и κ_x^3 вытекает $\mathscr{K}_2$ соответственно из [5] 35 и [6].

г) Пусть n — натуральное число. Через $\mathfrak{K}_n$ мы обозначим систему всех интервалов вида $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{r} \langle i_j/2^n, (i_j + 1)/2^n)$ [2]), где i_j — целые числа, $j = 1, 2, \ldots, r$. Для $n = 1, 2, \ldots$ образуют $\mathfrak{K}_n$ локально конечные непересекающиеся покрытия E_r, причем $\mathfrak{K}_n \subset \mathfrak{K} \subset \sigma$ и $\mathfrak{K}_{n+1}$ является уплотнением $\mathfrak{K}_n$. Следовательно, система σ удовлетворяет предположению $\mathscr{S}_3$.

д) Множества κ_x^i, $i = 1, 2, 3$ удовлетворяют предположению $\mathscr{K}_3'$. В самом деле, если $K_n \in \mathfrak{K}_n$ и $K_{n+1} \subset K_n$, то существует точка $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{K}_n$ и из [5] 20 вытекает, что $\{K_n\} \in \kappa_{x_0}^i$, $i = 1, 2, 3$.

е) Из 59 и предыдущего вытекает, что во всех случаях выполнено требование $\mathscr{K}_3$.

ж) Так как $\kappa_x^2 \subset \kappa_x^1$ и если $r > 1$, также $\kappa_x^3 \subset \kappa_x^2$ для всех $x \in E_r$, то в силу 31 имеем $\mathfrak{P}^1(A) \subset \mathfrak{P}^2(A)$ и если $r > 1$, также $\mathfrak{P}^2(A) \subset \mathfrak{P}^3(A)$ для всякого множества $A \in \sigma$. При этом кажды два из интегралов I^i, $i = 1, 2, 3$ совпадают на пересечении своих областей определения.

з) Сразу видно, что множества κ_x^1 для всех $x \in E_r$ совпадают с множествами κ_x, определенными в 15. Следовательно из 41, 56 и 63 вытекает, что если $A \in \sigma$, то $\mathfrak{P}^1(A) = \mathfrak{P}_0^1(A) = \mathfrak{L}(A)$ и $I^1(f, A) = \int_A f$ для каждой функции $f \in \mathfrak{P}^1(A)$.

---

[2]) $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{r} A_j$ есть декартово произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_r$.

[3]) Через $d(B)$ обозначается диаметр множества $B \subset E_r$.

67. Лемма. *Пусть* $a_i, b_i \in E$, $b_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Если частное* $\sum_{i=1}^{n} a_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} b_i$ *имеет смысл, то существуют такие целые числа* i_j, $1 \leqq i_j \leqq n$, $j = 1, 2$, *что*

$$a_{i_1}/b_{i_1} \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} b_i \leqq a_{i_2}/b_{i_2} .$$

Доказательство. Так как остальные случаи тривиальны, будем сразу предполагать, что a_i, b_i – конечные числа и $b_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть

$$\frac{a_{i_1}}{b_{i_1}} = \min \frac{a_i}{b_i} \quad \text{и} \quad \frac{a_{i_2}}{b_{i_2}} = \max \frac{a_i}{b_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) .$$

Тогда $(a_{i_1}/b_{i_1})\, b_i \leqq a_i \leqq (a_{i_2}/b_{i_2})\, b_i$ и, следовательно, $(a_{i_1}/b_{i_1}) \sum_{i=1}^{n} b_i \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i \leqq$ $\leqq (a_{i_2}/b_{i_2}) \sum_{i=1}^{n} b_i$.Делением последнего неравенства на $\sum_{i=1}^{n} b_i$ мы получаем доказываемое соотношение.

68. Теорема. *Пусть* $A \in \sigma$ *и* $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ *супераддитивна. Тогда* ${}_*F^1(A) = {}_*F^2(A)$ *и если* $r > 1$, *также* ${}_*F^1(A) = {}_*F^3(A)$.

Доказательство. Выберем $x \in E_r$ и предположим, что $r > 1$. Так как $\kappa_x^3 \subset \kappa_x^2 \subset \kappa_x^1$, то ${}_*F^1(x) \leqq {}_*F^2(x) \leqq {}_*F^3(x)$. Следовательно, достаточно доказать, что ${}_*F^1(x) \geqq {}_*F^3(x)$. Пусть ${}_*F^1(x) < {}_*F^3(x)$. Тогда существует такая последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_A$, что $\{B_n\} \in \kappa_x^1$ и $\lim\,[F(B_n)/G(B_n)] < {}_*F^3(x)$. Не умаляя общности, мы можем предполагать, что $F(B_n)/G(B_n) < +\infty$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $\mathfrak{K}_p^{B_n} = \{K_k^{n,p}\}_k$ (см. 58). Для всех $K_k^{n,p} \in \mathfrak{K}_p^{B_n}$ мы положим $B_k^{n,p} = B_n \cap K_k^{n,p}$, $n, p = 1, 2, \ldots$. Выберем определенное натуральное число n. Из $\mathscr{S}_1$ вытекает, что $\{B_k^{n,p}\}_k \subset \sigma_{B_n}$, $p = 1, 2, \ldots$, суть конечные непресекающиеся покрытия множества B_n. Если для некоторого числа p сумма $\sum_k F(B_k^{n,p})$ не имеет смысла, то существует такое число k_p, что $F(B_{k_p}^{n,p}) = -\infty$ и, следовательно,

$$F(B_{k_p}^{n,p})/G(B_{k_p}^{n,p}) = -\infty \leqq F(B_n)/G(B_n) .$$

Если сумма $\sum_k F(B_k^{n,p})$ имеет смысл, то имеет смысл и частное $\sum_k F(B_k^{n,p}) \big/ \sum_k G(B_k^{n,p})$. В самом деле, если $0 = \sum_k G(B_k^{n,p}) = G(B_n)$, то $0 > F(B_n) \geqq \sum_k F(B_k^{n,p})$. Однако, тогда в силу 67 существует опять такое число k_p, что

$$F(B_{k_p}^{n,p})/G(B_{k_p}^{n,p}) \leqq \sum_k F(B_k^{n,p}) \Big/ \sum_k G(B_k^{n,p}) \leqq F(B_n)/G(B_n) .$$

Из [5] 20 и [6] вытекает, что $\lim_{p \to \infty} \|B_{k_p}^{n,p}\| = 0$. Значит, можно найти число $p(n)$, для которого $\|B_{k_{p(n)}}^{n,p(n)}\| < 1/n$. Если мы теперь положим $A_n = B_{k_{p(n)}}^{n,p(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\{A_n\} \in \kappa_x^3$ и

$$\limsup\,[F(A_n)/G(A_n)] \leqq \lim\,[F(B_n)/G(B_n)] < {}_*F^3(x) .$$

Это противоречие.

Пусть $r = 1$ и пусть ${}_*F^1(x) < {}_*F^2(x)$. Тогда существует такая последовательность $\{C_n\} \subset \sigma_A$, что $\{C_n\} \in \kappa_x^1$ и $\lim [F(C_n)/G(C_n)] < {}_*F^2(x)$. В силу 64 существуют целые числа l_n и такие действительные числа $a_1^n < b_1^n < \ldots < a_{l_n}^n < b_{l_n}^n$, что $C_n \doteq \bigcup_{i=1}^{l_n} (a_i, b_i)$. Пусть p_n — натуральные числа, для которых $2^{-p_n} < \min(a_i - b_{i-1})$ $(i = 2, 3, \ldots, l_n)$. Для каждого натурального числа n образуют множества $C_n \cap K$, где $K \in \mathfrak{K}_{p_n}^{C_n}$, конечное непересекающееся покрытие множества C_n. Аналогично как в первой части доказательства проверится, что можно найти $K_n \in \mathfrak{K}_{p_n}^{C_n}$, для которых

$$F(C_n \cap K_n)/G(C_n \cap K_n) \leqq F(C_n)/G(C_n)\,,$$

$n = 1, 2, \ldots$. Так как $\|C_n \cap K_n\| \leqq 2$, то $\{C_n \cap K_n\} \in \kappa_x^2$. Итак, последнее неравенство непосредственно ведет к противоречию.

Примечание. В доказательстве предыдущей теоремы мы пользовались лишь аддитивностью функции G.

69. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$. Тогда $\mathfrak{P}^2(A) = \mathfrak{P}^1(A) = \mathfrak{L}(A)$ и если $r > 1$, также $\mathfrak{P}^3(A) = \mathfrak{L}(A)$.*

Теорема непосредственно вытекает из 68, 8 а), 66 з).

Примечание. При некотором выдоизменении излагаемой теории возможно на системе $\mathfrak{A}$ определить интеграл, являющийся обобщением интеграла Лебега. Это, однако, будет изложено в статье [7].

70. Обозначение. Если $K = \bigtimes_{j=1}^{r} \langle a_j, b_j \rangle$ [2]), где a_j, b_j — действительные числа, $a_j < b_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$, то мы положим $\widetilde{K} = \bigtimes_{j=1}^{r} \langle a_j, b_j)$. Пусть $G \in \mathfrak{F}(\sigma)$ — — произвольная функция, введенная в 4. Через $\widetilde{G}$ мы обозначим функцию, определенную на системе всех компактных невырожденных интервалов $K \subset E_r$ соотношением $\widetilde{G}(K) = G(\widetilde{K})$. Функция $\widetilde{G}$ аддитивна в смысле определения [4] II, 21. Если теперь $K \subset E_r$ — компактный невырожденный интервал и $f \in \mathfrak{F}(K)$, то мы можем рассматривать интеграл $\int_K f \,\mathrm{d}\widetilde{G}$, определенный в [4] II, 47 (если он конечно существует).

71. Теорема. *Пусть σ — минимальная система, содержащая $\mathfrak{K}$ и удовлетворяющая требованию $\mathscr{S}_1$, и пусть*

$$\kappa_x = \{\{K_n\} \in \mathfrak{K} : x \in \overline{K}_n,\ n = 1, 2, \ldots \ \text{ и } \ \mathrm{d}(K_n) \to 0\}\ ^{3})$$

для всех $x \in E_r$. В этом случае $A \in \sigma$ тогда и только тогда, когда существуют такие непересекающиеся интервалы $A_i \in \mathfrak{K}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, что $A = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$. Поло-

жим $K_i = \bar{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$. *Тогда*

$$I(f, A) = \sum_{i=1}^{p} \int_{K_i} f \, \mathrm{d}\tilde{G}$$

для каждой функции $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$, *для которой либо выражение влево, либо выражение вправо имеют смысл.*

Доказательство этой теоремы весьма просто и читатель может его без особого труда провести сам.

При подготовке предложенной статьи ряд ценных примечаний сделал проф. Ян Маржик (Jan Mařík). Автор выражает ему свою благодарность.

Литература

[1] *P. Alexandroff, P. Urysohn*: Mémoire sur les espaces topologiques compacts. Amterodam 1929.
[2] *P. R. Halmos*: Measure theory. New York 1950.
[3] *J. L. Kelley*: General topology. New York 1955.
[4] *J. Mařík*: Základy theorie integrálu v Euklidových prostorech. Časopis pro pěst. mat. *77* (1952), 1—51, 125—145, 267—300.
[5] *J. Mařík*: The surface integral. Чехословацкий мат. журнал *6* (81), 1956, 522—558.
[6] *J. Mařík, J. Matyska*: O jednom zobecnění Lebesgueova integrálu v E_m. Подготовляется к печати.
[7] *V. Pfeffer*: Об одном определении интеграла в топологических пространствах. Подготовляется к печати.

Výtah

PERRONŮV INTEGRÁL V TOPOLOGICKÝCH PROSTORECH

VÁCLAV PFEFFER, Praha

Budiž P neprázdná množina a budiž σ neprázdný systém jejích neprázdných podmnožin. Systém σ nechť je uzavřený vůči operaci množinového rozdílu, pokud tento rozdíl zůstává neprázdný. Je-li $A \in \sigma$, bude σ_A množina všech částí A, jež patří do σ. Na systému σ budiž pevně dána nezáporná konečná aditivní funkce G. Ke každému bodu $x \in P$ přiřaďme jistou množinu posloupností $\{B_n\}$, $B_n \in \sigma$, $n = 1, 2, \ldots$ a označme ji κ_x. Je-li $A \in \sigma$, je A^* množina všech $x \in P$, k nimž existuje taková posloupnost $\{B_n\} \in \kappa_x$, že $B_n \in \sigma_A$, $n = 1, 2, \ldots$

Dolní derivací funkce F definované na σ_A, $A \in \sigma$, v bodě $x \in P$ vzhledem k množině A nazveme infimum množiny všech čísel t (konečných nebo nekonečných), ke kterým existuje taková posloupnost $\{B_n\} \in \kappa_x$, že $B_n \in \sigma_A$, $n = 1, 2, \ldots$ a $\lim [F(B_n)/G(B_n)] = t$

(přitom klademe $a/0 = +\infty$ pro $a > 0$, $a/0 = -\infty$ pro $a < 0$, podíl $0/0$ se nedefinuje). Označíme ji ${}_*F(x, A)$.

Budiž $A \in \sigma$ a budiž f funkce definovaná na A^*. Superaditivní funkci M definovanou na σ_A nazveme *majorantou funkce* f na množině A, jestliže

$$x \in A^* \Rightarrow -\infty \neq {}_*M(x, A) \geqq f(x) .$$

Číslo $\inf M(A)$, kde infimum se bere přes všechny majoranty funkce f na množině A, nazveme *horním integrálem* funkce f na množině A a označíme je $I_I(f, A)$. Je-li $I_I(f, A) = -I_I(-f, A) \neq \pm\infty$, nazveme tuto společnou hodnotu *integrálem* funkce f na množině A a označíme ji $I(f, A)$. $\mathfrak{P}(A)$ bude systém všech funkcí, jež mají na množině A integrál.

Nyní předpokládejme, že platí:

$\mathscr{K}_1$. S každou posloupností patřící do κ_x, $x \in P$, patří tam také všechny posloupnosti z ní vybrané.

$\mathscr{K}_2$. Je-li $x \in P$, $\{B_n\} \in \kappa_x$, $A \in \sigma$ a $A \cap B_n \in \sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, je také $\{A \cap B_n\} \in \kappa_x$

$\mathscr{K}_3$. Je-li F taková superaditivní funkce definovaná na σ_A, $A \in \sigma$, že ${}_*F(x, A) = +\infty$ pro všechna $x \in A^*$, je $F > -\infty$.

(Je-li P lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor, splňující první axiom spočetnosti, můžeme vskutku volit systém σ a množiny κ_x tak, že předpoklady $\mathscr{K}_1 - \mathscr{K}_3$ jsou splněny.)

Za těchto předpokladů obsahuje systém $\mathfrak{P}(A)$, $A \in \sigma$, všechny konečné konstanty a je uzavřený vůči limitním přechodům pro posloupnosti majorisované a minorisované integrovatelnými funkcemi. Je-li $f, g \in \mathfrak{P}(A)$, je také $\alpha f + \beta g \in \mathfrak{P}(A)$ (po libovolném dodefinování tam, kde $\alpha f(x) + \beta g(x)$ nemá smysl) pro všechna reálná čísla α, β. Integrál $I(f, A)$ je potom nezáporným lineárním funkcionálem definovaným na $\mathfrak{P}(A)$ a platí pro něj obvyklé věty o limitních přechodech za integračním znamením. Existuje-li $I(f, A)$, existuje také $I(f, B)$ pro každou množinu $B \in \sigma_A$, přičemž neurčitý integrál $I(f)$ je aditivní množinovou funkcí.

Nechť P je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a nechť ještě platí:

$\mathscr{K}_4$. Je-li $\{B_n\} \in \kappa_x$ a je-li U okolí bodu $x \in P$, je od určitého indexu počínaje $B_n \subset U$.

Pak pro každé $A \in \sigma$ je $\bar{A}$ kompaktní, $A^* = \bar{A}$ a $\mathfrak{P}(A)$ obsahuje všechny konečné spojité funkce, definované na $\bar{A}$. Jsou-li všechny množiny systému σ borelovské a existuje-li regulární borelovská míra μ, jež na σ splývá s funkcí G, nezávisí hodnota $I_I(f, A)$ na tom, jak je funkce f definována na $\bar{A} - A$. Existuje-li Lebesgueův integrál $\int_A f \, d\mu$, je $f \in \mathfrak{P}(A)$ a $I(f, A) = \int_A f \, d\mu$.

Nechť existuje taková posloupnost $\{\mathfrak{K}_n\}$ lokálně konečných disjunktních pokrytí prostoru P, že $\mathfrak{K}_n \subset \sigma$ a $\mathfrak{K}_{n+1}$ je zjemněním $\mathfrak{K}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ a nechť platí:

$\mathscr{K}'_3$. Je-li $K_n \in \mathfrak{K}_n$ a $K_{n+1} \subset K_n$, $n = 1, 2, \ldots$, existuje takový bod $x \in P$, že $\{K_n\} \in \kappa_x$.

Pak existuje Lebesgueův integrál $\int_A f \, d\mu$, právě když existují integrály $I(f, A)$ a $I(|f|, A)$. Při tom předpoklad $\mathscr{K}_3$ plyne z předpokladů $\mathscr{K}_2$ a $\mathscr{K}'_3$, jakmile jsou uzávěry všech množin ze systému σ kompaktní.

Summary

THE PERRON INTEGRAL IN TOPOLOGICAL SPACES

VÁCLAV PFEFFER, Praha

Let P be a non-empty set and σ a non-empty system of non-empty subsets of P. Let the system σ be closed with respect to the operation of forming non-empty differences. If $A \in \sigma$, we denote by σ_A the set of those parts of A which belong to σ. Let there be given on the system σ a non-negative finite additive function G. To each point $x \in P$ associate a certain set of sequences $\{B_n\}$, $B_n \in \sigma$, $n = 1, 2, \ldots$ and denote it by κ_x. If $A \in \sigma$, let A^* be the set of all $x \in P$ for which there exists a sequence $\{B_n\} \in \kappa_x$ such that $B_n \in \sigma_A$, $n = 1, 2, \ldots$

Given a set $A \in \sigma$ and a function F defined on σ_A, we call the *lower derivate* of F at a point $x \in P$ relative to A the lower bound of the set of the numbers t (finite or infinite) such that there exists a sequence $\{B_n\} \in \kappa_x$ for which $B_n \in \sigma_A$, $n = 1, 2, \ldots$ and $\lim [F(B_n)/G(B_n)] = t$ (putting $a/0 = +\infty$ for $a > 0$ and $a/0 = -\infty$ for $a < 0$, without defining the ratio $0/0$). We shall denote it by ${}_*F(x, A)$.

Let $A \in \sigma$ and f be a function defined on A^*. A superadditive function M defined on σ_A is termed a *major function* of the function f on the set A if

$$x \in A^* \Rightarrow -\infty \neq {}_*M(x, A) \geqq f(x) .$$

The number $\inf M(A)$, where M is any major function of the function f on the set A, is called the *upper integral* of the function f on the set A and is denoted by $I_I(f, A)$. If $I_I(f, A) = -I_I(-f, A) \neq \pm \infty$, then this common value is called the *integral* of the function f on the set A and is denoted by $I(f, A)$. $\mathfrak{P}(A)$ will be the system of all functions integrable on the set A.

Let us suppose that the following conditions are fulfilled:

$\mathscr{K}_1$. With each sequence belonging to κ_x, all of its subsequences also belong to κ_x.

$\mathscr{K}_2$. If $x \in P$, $\{B_n\} \in \kappa_x$, $A \in \sigma$ and $A \cap B_n \in \sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, then also $\{A \cap B_n\} \in \kappa_x$.

$\mathscr{K}_3$. If F is a superadditive function defined on σ_A, $A \in \sigma$, such that ${}_*F(x, A) = +\infty$ for all $x \in A^*$, then $F > -\infty$.

(If P is a locally compact first-countable Hausdorff topological space, we can actually select a system σ and sets κ_x such that the assumptions $\mathscr{K}_1 - \mathscr{K}_3$ are fulfilled.)

Under these assumptions the system $\mathfrak{P}(A)$, $A \in \sigma$, contains all finite constants and is closed with respect to taking limits of sequences majorized and minorized by integrable

functions. If $f, g \in \mathfrak{P}(A)$, then also $\alpha f + \beta g \in \mathfrak{P}(A)$ (we assign $\alpha f + \beta g$ an arbitrary value at points $x \in A^*$ at which $\alpha f(x) + \beta g(x)$ is meaningless), for all real numbers α, β. The integral $I(f, A)$ is then a non-negative linear functional defined on $\mathfrak{P}(A)$ for which the usual theorems on the limit transitions under the integral sign are valid. If $I(f, A)$ exists, then there also exists $I(f, B)$ for each set $B \in \sigma_A$ and the indefinite integral $I(f)$ is an additive set function.

Let P be a locally compact Hausdorff topological space and let the following condition be fulfilled:

$\mathscr{K}_4$. If $\{B_n\} \in \kappa_x$ and U is a neighbourhood of the point $x \in P$, then there exists a positive integer n_0 such that $B_n \subset U$ for all $n \geqq n_0$.

Let $A \in \sigma$. Then $\bar{A}$ is compact, $A^* = \bar{A}$ and $\mathfrak{P}(A)$ contains all finite continuous functions defined on $\bar{A}$. Suppose that every set of the system σ is a Borel set and that there exists a regular Borel measure μ, equal to G on σ. Then the value $I_I(f, A)$ does not depend on the values of the function f on $\bar{A} - A$. If the Lebesgue integral $\int_A f \, d\mu$ exists, then $f \in \mathfrak{P}(A)$ and $I(f, A) = \int_A f \, d\mu$.

Let there exist a sequence $\{\mathfrak{K}_n\}$ of locally finite disjoint coverings of the space P such that $\mathfrak{K}_n \subset \sigma$ and that $\mathfrak{K}_{n+1}$ is a refinement of $\mathfrak{K}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Let the following condition be fulfilled:

$\mathscr{K}'_3$. If $K_n \in \mathfrak{K}_n$ and $K_{n+1} \subset K_n$, $n = 1, 2, \ldots$, then there exists a point $x \in P$ such that $\{K_n\} \in \kappa_x$.

Then the Lebesgue integral $\int_A f \, d\mu$ exists if and only if there exist both the integrals $I(f, A)$ and $I(|f|, A)$. The assumption $\mathscr{K}_3$ is a consequence of the assumptions $\mathscr{K}_2$ and $\mathscr{K}'_3$ as soon as the closures of all sets in the system σ are compact.