Časopis pro pěstování matematiky

Naděžda Poláková

Poznámka o charakteristikách uspořádaných množin

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 4, 387--390

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117470

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 88 * PRAHA 20. X. 1963 * ČÍSLO 4

POZNÁMKA O CHARAKTERISTIKÁCH USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN

NADĚŽDA POLÁKOVÁ, Brno

(Došlo dne 13. března 1961, po úpravě dne 8. ledna 1963)

V uspořádaném kontinuu definoval akademik J. NOVÁK jistá kardinální čísla, tak zv. charakteristiky (viz [3]). V této práci se definují a studují charakteristiky $\mathfrak{m}(S)$, $\mathfrak{r}_1(S)$, $\mathfrak{s}(S)$ v obecné (úplně) uspořádané množině S. Ukazuje se, že tyto charakteristiky se zachovají při vnoření uspořádané množiny do jistého uspořádaného kontinua (mezery doplníme bodem, skoky intervalem $(0,1)$). Pro $\mathfrak{r}_1(S)$ je odvozena jistá vlastnost, jíž je tato charakteristika úplně definována.

Uspořádaná množina C je uspořádaným kontinuem, jestliže obsahuje dva různé krajní body a žádný řez v C není ani mezerou ani skokem.

Nechť S je uspořádaná množina. Označme $K(S)$ množinu, která vznikne z S tak, že mezery vyplníme bodem a přidáme krajní body (pokud neexistují). Označme dále $C(S)$ množinu, která vznikne tak, že každý skok v $K(S)$ vyplníme intervalem $(0, 1)$. Zřejmě je $C(S) \subset (0, 1) . K(S)$.[1])

Lemma 1. *Jsou-li $S_1 \subset S_2$ uspořádané množiny, pak $K(S_2)$ obsahuje množinu podobnou s $K(S_1)$.*

Lemma je zřejmé.

Intervalem v S rozumíme každou neprázdnou množinu $I \subset S$ prvků z S s vlastností: $x, y \in I,\ x < z < y,\ z \in S \Rightarrow z \in I$.

Posloupnost bodů $\{x_\lambda\}\lambda < \alpha$ v S nazveme rostoucí (klesající), když $x_\lambda < x_\mu$ ($x_\mu < x_\lambda$) pro libovolnou dvojici ordinálních čísel $\lambda < \mu$, kde $\mu < \alpha$. Klesající a rostoucí posloupnosti nazveme monotonními.

Množina $\emptyset \neq H \subset S$ se nazývá hustá v S, jestliže ke každé dvojici prvků $a, b \in S$, $a < b$ existují prvky $a', b' \in H$ tak, že $a \leqq a' < b' \leqq b$.

Buď $\mathfrak{m}(S)$ nejmenší mohutnost husté podmnožiny v S.

Věta 1. *Nechť S je nekonečná uspořádaná množina. Pak* $\mathfrak{m}[C(S)] = \mathfrak{m}(S)$.

Důkaz. Existuje $H \subset S$ hustá v S, kard $H = \mathfrak{m}(S)$. Označme $\mathfrak{a}$ mohutnost množiny skoků v S. Pak $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{m}(S)$. Zkonstruujme množinu $H' \subset C(S)$ tak, že k množině H přidáme všechna racionální čísla z vyplněných skoků. Pak H' je hustá v $C(S)$,

[1]) Tento součin znamená množinu definovanou v [1], str. 80.

kard $H' = \mathfrak{m}(S) + \alpha\aleph_0 = \mathfrak{m}(S)$. Tedy $\mathfrak{m}[C(S)] \leqq \mathfrak{m}(S)$. Opačná nerovnost je zřejmá.

Buď $\mathscr{S}(S)$ množina mohutností všech monotonních posloupností v S; položme $\mathfrak{s}(S) = \sup \mathscr{S}(S)$.

Věta 2. *Nechť S je nekonečná uspořádaná množina. Pak $\mathfrak{s}(S) = \mathfrak{s}[C(S)]$.*

Důkaz. Buď $P = \{u_\lambda\}$ $\lambda < \alpha$ např. rostoucí posloupnost v $C(S)$. Platí kard$(P \cap S) \leqq \mathfrak{s}(S)$, dále množina všech prvků $u_\lambda \in P$, jež padnou do mezer v S i množina všech prvků $u_\lambda \in P$, které padnou mezi krajní body skoků v S, má zřejmě mohutnost menší nebo rovnou $\mathfrak{s}(S)$. Ježto $S \subset C(S)$, je $\mathfrak{s}(S) \leqq \mathfrak{s}[C(S)]$.

Definujme v množině S dyadické dělení podobně jako v práci [4]: Řekneme, že systém $(\mathfrak{P}, S)$ intervalů v S je dyadickým dělením, krátce dělením, uspořádané množiny S, jestliže jsou splněny následující čtyři podmínky:

1. Pro libovolné dva intervaly $X, Y \in (\mathfrak{P}, S)$ platí buď $X \cap Y = Y$ nebo $X \cap Y = X$ nebo $X \cap Y = \emptyset$.

2. $S \in (\mathfrak{P}, S)$.

3. Ke každému intervalu $X \in (\mathfrak{P}, S)$ různému od jednobodového existují dva subintervaly $X_1, X_2 \in (\mathfrak{P}, S)$ tak, že $X_1 \cup X_2 = X$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

4. Průnik každého monotonního systému intervalů náležejících $(\mathfrak{P}, S)$ je buď prázdný nebo interval z $(\mathfrak{P}, S)$.

Nechť A, $A \neq S$ je interval v S. Označme $\mathfrak{P}(A, S)$ systém všech $X \in (\mathfrak{P}, S)$ takových, že $X \supset A$, $X \neq A$. Jestliže $X \prec Y$ znamená $X \neq Y$, $X \supset Y$, pak systém $\mathfrak{P}(A, S)$ je neprázdný, monotonní a dobře uspořádaný vzhledem k relaci $\prec$ (důkaz je obdobný lemmatu 1 v [4]). Definujme řád intervalu A jako ordinální číslo, které je rovno ordinálnímu typu systému $\mathfrak{P}(A, S)$. Pro $A = S$ definujme řád rovný nule. Nejmenší ordinální číslo $\alpha(\mathfrak{P}, S)$ takové, že neexistuje žádný interval $X \in (\mathfrak{P}, S)$ řádu většího než $\alpha(\mathfrak{P}, S)$, nazývá se řádem dělení $(\mathfrak{P}, S)$.

Nechť $\mathscr{R}(S)$ značí množinu mohutností řádů $\alpha(\mathfrak{P}, S)$ všech dělení $(\mathfrak{P}, S)$ v S; položme $\mathfrak{r}_1(S) = \min \mathscr{R}(S)$.

Je-li $S \neq \emptyset$ uspořádaná množina, pak existuje aspoň jedno dělení množiny S. Dokáže se podobně jako v [4], věta 3. Místo prvků husté podmnožiny v S užijeme vhodné množiny řezů v S.

Z důkazu tohoto tvrzení plyne, že každému prvku $x \in S$ lze přiřadit pomocí dělení $(\mathfrak{P}, S)$ posloupnost $\{i_\xi\}$ $\xi < \alpha$ nul a jedniček typu α. Doplníme ji nulami na typ $\alpha(\mathfrak{P}, S)$. Dostaneme podobné zobrazení množiny S na lexikograficky uspořádanou množinu posloupností nul a jedniček typu $\alpha(\mathfrak{P}, S)$.

Nechť uspořádaná množina S je podobna lexikograficky uspořádané množině posloupností nul a jedniček typu ϑ. Pak existuje dělení v S řádu $\leqq \vartheta$. Důkaz se provede obdobně jako v práci [5] (důkaz věty 3).

Nechť $\mathscr{L}$ je množina posloupností nul a jedniček typu μ uspořádaných lexikograficky. Řekneme, že $\mathscr{L}$ je l-representací typu μ množiny S, když S a $\mathscr{L}$ jsou isomorfní.

Z předcházejícího plyne

Věta 3. *Charakteristika* $\mathfrak{r}_1(S)$ *je rovna mohutnosti minimálního typu* μ, *k němuž existuje l-representace typu* μ *množiny* S.

Lemma 2. *Buď* S *uspořádaná množina*, kard $S \geqq 2$. *Pak* $\mathfrak{r}_1(S) \leqq \mathfrak{r}_1[C(S)]$.

Důkaz. Podle věty 3 existuje l-representace množiny $C(S)$, jejíž typ má mohutnost $\mathfrak{r}_1[C(S)]$; tedy existuje také l-representace množiny S téhož typu. Odtud plyne tvrzení.

Lemma 3. *Buď* S *nekonečná uspořádaná množina. Pak* $\mathfrak{r}_1[C(S)] \leqq \mathfrak{r}_1(S)$.

Důkaz. Buď $\nu > 0$ libovolné dané ordinální číslo. Označme V_ν množinu všech posloupností nul a jedniček typu ν uspořádanou lexikograficky. V množině V_ν není mezer.

Podle věty 3 existuje l-representace množiny S typu μ, kde kard $\mu = \mathfrak{r}_1(S)$. Tedy S je podobno jisté části S^* množiny V_μ. Tedy $K(S)$ je podobno $K(S^*)$, jež je podle lemmatu 1 podobno jisté podmnožině v $K(V_\mu) = V_\mu$. Dále je $C(S) \subset (0, 1) \,.\, K(S)$; protože $(0, 1)$ je podobno části V_{ω_0} a $K(S)$ části V_μ, je $C(S)$ podobno jisté podmnožině v $V_{\omega_0} \,.\, V_\mu = V_{\mu + \omega_0}$. Tedy existuje l-representace typu $\mu + \omega_0$ množiny $C(S)$. Odtud plyne $\mathfrak{r}_1[C(S)] \leqq$ kard $(\mu + \omega_0) =$ kard $\mu = \mathfrak{r}_1(S)$.

Z předcházejícího plyne tato věta:

Věta 4. *Buď* S *nekonečná uspořádaná množina. Pak* $\mathfrak{r}_1[C(S)] = \mathfrak{r}_1(S)$.

Důsledek 1. *Každá nerovnost platná mezi charakteristikami* $\mathfrak{m}(S)$, $\mathfrak{s}(S)$, $\mathfrak{r}_1(S)$ *v uspořádaném kontinuu platí mezi těmito charakteristikami v libovolné nekonečné uspořádané množině.*

Nechť μ je ordinální číslo, M množina mohutnosti kard μ, $\{u_\lambda\}$ $\lambda < \mu$ posloupnost utvořená ze všech prvků množiny M, v níž každý prvek z M vystupuje právě jednou. Buď $\mathfrak{M}$ nějaký systém podmnožin v M. Pro $A, B \in \mathfrak{M}$ položme $A < B$, jestliže

(1) existuje aspoň jeden prvek $u_\lambda \in (A - B) \cup (B - A)$,

(2) je-li u_{λ_0} první prvek s touto vlastností, je $u_{\lambda_0} \in B$ (viz [2]).

Řekneme, že systém $\mathfrak{M}$ je n-representací typu μ množiny S, jestliže S a $\mathfrak{M}$ jsou isomorfní.

Věta 5. *Nechť* S *je uspořádaná množina,* μ *ordinální číslo. Pak jsou ekvivalentní tvrzení:*

(I) *Existuje l-representace typu* μ *množiny* S.

(II) *Existuje n-representace typu* μ *množiny* S.

Důkaz. Nechť platí (I). Každému $x \in S$ je l-representací přiřazena posloupnost $\{x_\lambda\}$ $\lambda < \mu$. Buď M množina mohutnosti kard μ, $\{u_\lambda\}$ $\lambda < \mu$ posloupnost utvořená ze všech prvků v M, v níž každý prvek z M vystupuje právě jednou. Označme $f(x) \subset M$ množinu všech prvků $u_\lambda \in M$ takových, že $x_\lambda = 1$. Pak systém všech množin $f(x)$ pro $x \in S$ je n-representací typu μ množiny S.

Nechť platí (II). Buď M množina mohutnosti kard μ, $\{u_\lambda\}$ $\lambda < \mu$ posloupnost utvořená ze všech prvků v M, v níž každý prvek z M se vyskytne právě jednou. Nechť $\mathfrak{M}$ je n-representace typu μ množiny S. Přiřaďme každému $A \in \mathfrak{M}$, kde $A = f(a)$ je obraz prvku $a \in S$ v dané n-representaci, posloupnost nul a jedniček typu μ $\alpha(A) = \bar{\alpha}(a) = \{\alpha_\lambda\}$ $\lambda < \mu$, kde $\alpha_\lambda = 0$, jestliže $u_\lambda \bar{\in} A$, $\alpha_\lambda = 1$, je-li $u_\lambda \in A$. Toto přiřazení je l-representací typu μ množiny S.

Důsledek 2. *Buď S uspořádaná množina. Pak jsou si rovna tato kardiální čísla:*

(I) *Mohutnost nejmenšího ordinálního čísla α, k němuž existuje l-representace typu α množiny S.*

(II) *Mohutnost nejmenšího ordinálního čísla β, k němuž existuje n-representace typu β množiny S.*

(III) $\mathfrak{r}_1(S)$.

Literatura

[1] *F. Hausdorff*: Grundzüge der Mengenlehre, Veit et Comp., Leipzig 1914.

[2] *G. Kurepa*: Sur une classe de continus ordonnés. C. R. Acad. Sci Paris *240* (1955), 2283–2284.

[3] *J. Novák*: O někotorych charaktěristikach uporjadočennogo kontinuuma. Čechosl. mat. žurnal *77* (1952), 369–386.

[4] *J. Novák*: On Partition of an Ordered Continuum, Fundamenta Math. *39* (1952), 53–63.

[5] *M. Novotný*: Sur la représentation des ensembles ordonnés. Fundamenta Math. *38* (1952), 97–102.

Резюме

ЗАМЕТКА О ХАРАКТЕРИСТИКАХ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

НАДЕЖДА ПОЛАКОВА, (Naděžda Poláková), Брно

В этой работе говорится о некоторых характеристиках упорядоченного множества, которые определены Й. Новаком для упорядоченного континуума. Исследуется также репрезентация множеств; результат находится в связи с одной работой М. Новотного.

Summary

A NOTE ON CHARACTERISTICS OF ORDERED SETS

Naděžda Poláková, Brno

This paper deals with certain characteristics of ordered set which originally were defined by J. Novák for an ordered continuum. The representation of a set is also studied, with a result in connected with one of M. Novotný.