Časopis pro pěstování matematiky

Jan Mařík

O polynomech, které mají jen reálné kořeny

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 1, 5--9

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117490`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

O POLYNOMECH, KTERÉ MAJÍ JEN REÁLNÉ KOŘENY

JAN MAŘÍK, Praha

(Došlo dne 13. září 1961)

Jsou dokázány jisté vztahy mezi koeficienty polynomů, které mají jen reálné kořeny.

Označení. Pro $n = 1, 2, \ldots$ buď P_n množina všech $(n + 1)$-členných posloupností reálných čísel $[a_0, \ldots, a_n]$ s touto vlastností: Buďto je $a_j = 0$ pro všechna j nebo je každý kořen polynomu

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j x^{n-j}}{j!\,(n-j)!} \tag{1}$$

reálný.

Jsou-li k, n celá čísla, $1 \leqq k \leqq n$, buď P_n^k množina všech $[a_0, \ldots, a_n] \in P_n$ takových, že $a_0 \neq 0$, $|a_{n-1}| + |a_n| > 0$ a že každý kořen polynomu (1) je nejvýš k-násobný.

Pro $a = [a_0, \ldots, a_n] \in P_n$ položíme dále

$$F_j(a) = a_{j+1}^2 - a_j a_{j+2} \quad (j = 0, \ldots, n-2),$$

$$G_j(a) = 4F_j(a)\,F_{j+1}(a) - (a_{j+1}a_{j+2} - a_j a_{j+3})^2 \quad (j = 0, \ldots, n-3).$$

Lemma 1. *Buď f nekonstantní reálný polynom, jehož každý kořen je reálný. Potom je také každý kořen polynomu f' reálný a každý r-násobný $(r > 1)$ kořen polynomu f' je $(r + 1)$-násobným kořenem polynomu f.*

Důkaz. Můžeme psát $f(x) = c \prod_{j=1}^{q} (x - \alpha_j)^{m_j}$, kde $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_q$, $m_j > 0$. Potom číslo α_j je $(m_j - 1)$-násobným kořenem polynomu f'. Buď p_j počet kořenů polynomu f' v intervalu (α_j, α_{j+1}) (každý kořen se počítá s příslušnou násobností). Položíme-li $n = \sum_{j=1}^{q} m_j$, má f' stupeň $n - 1$, takže $n - q + \sum_{j=1}^{q-1} p_j = \sum_{j=1}^{q} (m_j - 1) + \sum_{j=1}^{q-1} p_j \leqq n - 1$ a tedy $\sum_{j=1}^{q-1} p_j \leqq q - 1$. Protože podle Rolleovy věty je $p_j \geqq 1$, má funkce f' právě jeden kořen β_j v každém z intervalů (α_j, α_{j+1}) $(j = 1, \ldots, q - 1)$ a tento kořen je jednoduchý. Protože $\sum_{j=1}^{q} (m_j - 1) + q - 1 = n - 1$, nemá f' jiné kořeny než α_j, β_j. Odtud lemma ihned plyne.

Lemma 2. *Buď $k > 1$ a buď $[a_0, \ldots, a_n] \in P_n^k$. Potom $[a_0, \ldots, a_{n-1}] \in P_{n-1}^{k-1}$.*

Důkaz. Položme $f(x) = \sum_{j=0}^{n} [a_j x^{n-j}/j!\,(n-j)!]$. Potom $f'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} [a_j x^{n-1-j} : : j!\,(n-1-j)!]$; je-li $a_{n-1} = 0$, je $a_n \neq 0$, tedy $f(0) \neq 0, f'(0) = 0$ a podle lemmatu 1 je $f''(0) \neq 0$, takže $a_{n-2} \neq 0$. Ostatní snadno plyne z lemmatu 1.

Lemma 3. *Nechť $[a_0, \ldots, a_n] \in P_n^k$, $a_n \neq 0$. Potom $[a_n, \ldots, a_0] \in P_n^k$.* (Snadné.)

Lemma 4. *Buď $k \leqq p - 1$. Nechť $[b_0, \ldots, b_p] \in P_p^k$, $b_p = 0$. Potom $[b_0/p, \ldots, b_{p-2}/2, b_{p-1}] \in P_{p-1}^k$.*

Důkaz. Položme $f(x) = \sum_{j=0}^{p} [b_j x^{p-j}/j!\,(p-j)!]$, $g(x) = \sum_{j=0}^{p-1} [b_j/(p-j)] \,.\, [x^{p-1-j} : : j!\,(p-1-j)!]$. Naše tvrzení plyne ihned ze vztahů $b_{p-1} \neq 0$, $f(x) = x\,g(x)$.

Lemma 5. *Buď $a \in P_3^1$. Potom $G_0(a) > 0$.*

Důkaz. Nechť $a = [a_0, a_1, a_2, a_3]$. Položme $b_0 = \frac{1}{6}a_0$, $b_1 = \frac{1}{2}a_1$, $b_2 = \frac{1}{2}a_2$, $b_3 = \frac{1}{6}a$. Potom má polynom $\sum_{j=0}^{3} b_j x^{3-j}$ jednoduché reálné kořeny x_1, x_2, x_3. Buď $D = b_0^4 \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2$. V algebře se dokazuje, že $D = b_1^2 b_2^2 + 18 b_0 b_1 b_2 b_3 - 27 b_0^2 b_3^2 - 4(b_0 b_2^3 + b_1^3 b_3)$; snadno se však přesvědčíme, že $0 < 48D = 3a_1^2 a_2^2 + 6a_0 a_1 a_2 a_3 - a_0^2 a_3^2 - 4(a_0 a_2^3 + a_1^3 a_3) = G_0(a)$.

Lemma 6. *Buď $c \in P_q^{q-1}$. Potom $F_{q-2}(c) > 0$.*

Důkaz. Je-li $c = [c_0, \ldots, c_q]$, je $[c_0, c_1, c_2] \in P_2^1$ podle lemmatu 2. To znamená, že polynom $\frac{1}{2}c_0 \,.\, x^2 + c_1 x + \frac{1}{2}c_2$ má jednoduché reálné kořeny, takže $F_0(c) = c_1^2 - c_0 c_2 > 0$. Je-li tedy $c_q \neq 0$, je $F_{q-2}(c) > 0$ podle lemmatu 3. Je-li však $c_q = 0$, je $c_{q-1} \neq 0$ a vztah $F_{q-2}(c) = c_{q-1}^2 - c_{q-2} c_q > 0$ je zřejmý.

Lemma 7. *Buď $b \in P_p^{p-2}$. Potom $G_{p-3}(b) > 0$.*

Důkaz. Je-li $b = [b_0, \ldots, b_p]$, je $[b_0, b_1, b_2, b_3] \in P_3^1$ podle lemmatu 2 a $G_0(b) > 0$ podle lemmatu 5. Je-li tedy $b_p \neq 0$, je $G_{p-3}(b) > 0$ podle lemmatu 3. Je-li však $b_p = 0$, můžeme podle lemmatu 4 v lemmatu 6 položit $q = p - 1$, $c = [b_0/p, \ldots, \frac{1}{2}b_{p-2}, b_{p-1}]$. Tím dostaneme nerovnost $(\frac{1}{2}b_{p-2})^2 - \frac{1}{3}b_{p-3}\, b_{p-1} > 0$. Protože $b_{p-1} \neq 0$ a $G_{p-3}(b) = 4(b_{p-2}^2 - b_{p-1} b_{p-3})\, b_{p-1}^2 - b_{p-2}^2 b_{p-1}^2 = b_{p-1}^2 (3b_{p-2}^2 - 4b_{p-1} b_{p-3})$, je opět $G_{p-3}(b) > 0$.

Lemma 8. *Buďte j, n celá, $0 \leqq j \leqq n - 2$; buď $a \in P_n^{n-1}$. Potom $F_j(a) > 0$.*

Důkaz. Položme $q = j + 2$. Je-li $a = [a_0, \ldots, a_n]$, je $c = [a_0, \ldots, a_q] \in P_q^{q-1}$ podle lemmatu 2 a $F_j(a) = F_{q-2}(c) > 0$ podle lemmatu 6.

Lemma 9. *Buďte j, n celá, $0 \leqq j \leqq n-3$; buď $a \in P_n^{n-2}$. Potom $G_j(a) > 0$.*

Důkaz. Položme $p = j + 3$. Je-li $a = [a_0, \dots, a_n]$, je $b = [a_0, \dots, a_p] \in P_p^{p-2}$ podle lemmatu 2 a $G_j(a) = G_{p-3}(b) > 0$ podle lemmatu 7.

Lemma 10. *Buď $a \in P_n^n - P_n^{n-1}$. Potom $F_j(a) = 0$ pro $j = 0, \dots, n-2$.*

Důkaz. Je-li $a = [a_0, \dots, a_n]$, můžeme psát

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j x^{n-j}}{j!\,(n-j)!} = \frac{a_0}{n!}(x+\alpha)^n = a_0 \sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha^j x^{n-j}}{j!\,(n-j)!},$$

takže $a_j = a_0 \alpha^j$. Odtud lemma ihned plyne.

Lemma 11. *Buď $a \in P_n^n - P_n^{n-2}$. Potom $G_j(a) = 0$ pro $j = 0, \dots, n-3$.*

Důkaz. Je-li $a = [a_0, \dots, a_n]$, můžeme psát

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j x^{n-j}}{j!\,(n-j)!} = \frac{a_0}{n!}(x+\alpha)^{n-1}(x+\beta) =$$

$$= \frac{a_0}{n!}\left[x^n + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{j}\alpha^j + \binom{n-1}{j-1}\alpha^{j-1}\beta\right)x^{n-j} + \alpha^{n-1}\beta\right],$$

takže $a_j = (a_0/n) \,.\, \alpha^{j-1}((n-j)\,\alpha + j\beta)$. Snadno se spočte, že $F_j(a) = (a_0/n)^2 \,.$ $.\, \alpha^{2j}(\alpha - \beta)^2$, $a_{j+1}a_{j+2} - a_j a_{j+3} = 2(a_0/n)^2\, \alpha^{2j+1}(\alpha - \beta)^2$; odtud lemma ihned plyne.

Věta 1. *Buď n celé $\geqq 3$; buďte $b_0, \dots, b_n$ reálná čísla taková, že $b_0 b_n \neq 0$ a že každý kořen polynomu $f(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^{n-j}$ je reálný. Potom*

$$b_j^2 \geqq \frac{(j+1)(n-j+1)}{j(n-j)}\, b_{j-1} b_{j+1} \quad (j = 1, \dots, n-1)\,, \tag{2}$$

(3)

$$4\left(b_{j+1}^2 - \frac{(j+2)(n-j)}{(j+1)(n-j-1)}\, b_j b_{j+2}\right)\left(b_{j+2}^2 - \frac{(j+3)(n-j-1)}{(j+2)(n-j-2)}\, b_{j+1} b_{j+3}\right) \geqq$$

$$\geqq \left(b_{j+1} b_{j+2} - \frac{(j+3)(n-j)}{(j+1)(n-j-2)}\, b_j b_{j+3}\right)^2 \quad (j = 0, \dots, n-3)\,.$$

Má-li f n-násobný kořen, nastává v (2) rovnost; jinak platí v (2) ostrá nerovnost ($j = 1, \dots, n-1$). Má-li f aspoň $(n-1)$-násobný kořen, nastává v (3) rovnost; jinak platí v (3) ostrá nerovnost ($j = 0, \dots, n-3$).

Důkaz. Položíme $a_j = j!\,(n-j)!\, b_j$ a použijeme lemmat 8–11.

Poznámka 1. Snadno se zjistí, že platí tvrzení, která vzniknou tím, že v lemmatech 2–9 píšeme P_n místo P_n^k a $F_j(a) \geqq 0$, $G_j(a) \geqq 0$ místo $F_j(a) > 0$, $G_j(a) > 0$. Kromě toho můžeme lemma 3 nahradit implikací

$$[a_0, \dots, a_n] \in P_n \Rightarrow [a_n, \dots, a_0] \in P_n\,.$$

Věta 2. *Buď n celé* $\geqq 3$. *Nechť reálný polynom* $\sum_{j=0}^{n} b_j x^{n-j}$ *má jen reálné kořeny. Potom platí* (2), (3) *a dále*

$$b_j^2 \geqq b_{j-1} b_{j+1} \quad (j = 1, \ldots, n-1)\,, \tag{4}$$

$$4(b_{j+1}^2 - b_j b_{j+2})(b_{j+2}^2 - b_{j+1} b_{j+3}) \geqq (b_{j+1} b_{j+2} - b_j b_{j+3})^2 \tag{5}$$
$$(j = 0, \ldots, n-3)\,.$$

Důkaz. Vztahy (2) a (3) plynou z předešlé poznámky; z (2) plyne snadno (4). Buď nyní j celé, $0 \leqq j \leqq n - 3$. Zvolme celá s, q tak, aby platilo

$$s \geqq j\,, \quad q \geqq n \tag{6}$$

a položme $r = s - j$, $p = q + r$, $a_0 = \ldots = a_{r-1} = 0$, $a_{r+k} = b_k$ $(k = 0, \ldots, n)$, $a_{r+n+1} = \ldots = a_p = 0$. Potom je také každý kořen polynomu $\sum_{k=0}^{p} a_k x^{p-k}$ reálný a podle toho, co jsme dokázali, je

$$4\left(a_{s+1}^2 - \frac{(s+2)(p-s)}{(s+1)(p-s-1)}\, a_s a_{s+2}\right)\left(\ldots\right) \geqq \left(\ldots\right)^2.$$

Protože $s = r + j$, je $a_s = a_{r+j} = b_j, \ldots, a_{s+3} = b_{j+3}$, $p - s = p - r - j = q - j$ a tedy

$$4\left(b_{j+1}^2 - \frac{(s+2)(q-j)}{(s+1)(q-j-1)}\, b_j b_{j+2}\right)\left(b_{j+2}^2 - \frac{(s+3)(q-j-1)}{(s+2)(q-j-2)}\, b_{j+1} b_{j+3}\right) \geqq$$
$$\geqq \left(b_{j+1} b_{j+2} - \frac{(s+3)(q-j)}{(s+1)(q-j-2)}\, b_j b_{j+3}\right)^2. \tag{7}$$

Odtud plyne (5) limitním přechodem $s \to \infty$, $q \to \infty$.

Poznámka 2. Dá se dokázat, že vztah (7) platí pro libovolná celá čísla j, n, s, q a libovolná reálná čísla $b_j, \ldots, b_{j+3}$, pro něž $0 \leqq j \leqq n - 3$ a pro něž platí (3) a (6). Vztah (7) a tedy také vztah (5) říká tedy méně než vztah (3); vztah (5) je uveden jen proto, že je jednodušší než (3).

Poznámka 3. Naskýtá se otázka, zda vztah (7) platí za příslušných předpokladů také pro libovolná reálná čísla s, q, splňující vztah (6). Odpověď na tuto otázku je však záporná. Položíme-li např. $b_k = \binom{n}{k}$, $q = n$ a zvolíme-li s tak, aby bylo $j < s < j + 1$, jsou splněny předpoklady věty 2 i vztah (6); odečteme-li však pravou stranu nerovnosti (7) od levé, dostaneme číslo

$$4\binom{n}{j+1}^2 \binom{n}{j+2}^2 \frac{(s-j)^2 (s-j-1)}{(s+1)^2 (s+2)(j+2)(j+3)^2} < 0\,,$$

takže (7) v tomto případě neplatí.

Резюме

О ПОЛИНОМАХ, ВСЕ КОРНИ КОТОРЫХ ВЕЩЕСТВЕНЫ

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага

Пусть n — целое $\geqq 3$; пусть $a_0, \ldots, a_n$ — вещественные числа такие, что $a_0 a_n \neq 0$ и что всякий корень полинома $f(x) = \sum_{j=0}^{n} [a_j x^{n-j}/j!\,(n-j)!]$ вещественный. Тогда

$$(*) \qquad a_j^2 \geqq a_{j-1} a_{j+1} \qquad (j = 1, \ldots, n-1),$$

$$\left(\substack{*\\*}\right) \qquad 4(a_{j+1}^2 - a_j a_{j+2})(a_{j+2}^2 - a_{j+1} a_{j+3}) \geqq (a_{j+1} a_{j+2} - a_j a_{j+3})^2 \qquad (j = 0, \ldots, n-3).$$

Если f имеет n-кратный корень, то в соотношении $(*)$ имеет место знак $=$; в остальных случаях в $(*)$ имеет место знак $>$ $(j = 1, \ldots, n-1)$. Если f имеет n- или $(n-1)$-кратный корень, то в $\left(\substack{*\\*}\right)$ имеет место знак $=$; в остальных случаях в $\left(\substack{*\\*}\right)$ имеет место знак $>$ $(j = 0, \ldots, n-3)$.

Zusammenfassung

ÜBER POLYNOME, DEREN SÄMTLICHE WURZELN REELL SIND

JAN MAŘÍK, Praha

Es sei n ganz $\geqq 3$; es seien $a_0, \ldots, a_n$ solche reelle Zahlen, dass $a_0 a_n \neq 0$ und dass jede Wurzel des Polynoms $f(x) = \sum_{j=0}^{n} [a_j x^{n-j}/j!\,(n-j)!]$ reell ist. Dann gilt

$$(*) \qquad a_j^2 \geqq a_{j-1} a_{j+1} \quad (j = 1, \ldots, n-1),$$

$$(**) \qquad 4(a_{j+1}^2 - a_j a_{j+2})(a_{j+2}^2 - a_{j+1} a_{j+3}) \geqq (a_{j+1} a_{j+2} - a_j a_{j+3})^2 \qquad (j = 0, \ldots, n-3).$$

Hat f eine n-fache Wurzel, so gilt in $(*)$ das Zeichen $=$; sonst gilt in $(*)$ das Zeichen $>$ $(j = 1, \ldots, n-1)$. Hat f eine mindestens $(n-1)$-fache Wurzel, so gilt in $\left(\substack{*\\*}\right)$ das Zeichen $=$; sonst gilt in $\left(\substack{*\\*}\right)$ das Zeichen $>$ $(j = 0, \ldots, n-3)$.