Valter Šeda

Применение главной теоремы конформного отображения в теории линейных дифференциальных уравнений 2-ого порядка

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 1, 10--27

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117491`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

ПРИМЕНЕНИЕ ГЛАВНОЙ ТЕОРЕМЫ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-ого ПОРЯДКА

ВАЛЬТЕР ШЕДА (Valter Šeda), Братислава

(Поступило в редакцию 3 марта 1962 г.)

В настоящей работе доказывается при помощи главной теоремы конформного отображения существование дифференциальных уравнений (1), определенных в односвязной области T, дополнение которой содержит помимо точки ∞ еще другую точку, и обладающих совершенно другими свойствами, чем уравнения (1) с целым коэффициентом Q. Далее исследуются свойства решения уравнения (1) в некоторых частных случаях. Помимо прочего, дается оценка модуля и аргумента разности двух нулевых точек функции yy', причем y является решением дифференциального уравнения (1). Одновременно дается и оценка модуля решения уравнения (1).

Связь между линейным дифференциальным уравнением

$$y'' = Q(x)\, y\,, \tag{1}$$

где $Q(x)$ — функция, голоморфная в односвязной области T, $\infty \notin T$, и дифференциальным уравнением Шварца

$$-\{z, x\} = Q(x) \tag{2}$$

определенным в той же области, причем символ

$$\{z, x\} \equiv \frac{1}{2}\frac{z'''(x)}{z'(x)} - \frac{3}{4}\left(\frac{z''(x)}{z'(x)}\right)^2$$

обозначает производную Шварца от функции z в точке x, позволяет нам отнести результаты теории дифференциальных уравнений (1) к мероморфным, в первую очередь одно-однозначным функциям в области T ([1], [2], [3], [4], [5]). С другой стороны, многие свойства дифференциального уравнения (1) можно вывести из теорем об однозначных аналитических функциях ([6], [7]). В этой работе мы будем исходить из главной теоремы конформного отображения. Во всех рассуждениях и выводах мы будем опираться на результаты работы [7], где эта теорема приведена под названием вспомогательной теоремы 2; далее в ней описана связь между уравнениями (1) и (2) в основном леммой 5 и аналогичной ей леммой 6. Кроме того, мы будем здесь пользоваться утверждениями, как, например: уравнение (1) имеет свойство A; все решения двух уравнений вида (1) имеют одни и те же нулевые точки; уравнение (1) однозначно определено нулями своих решений. Смысл этих утверждений опять-таки пояснен в работе [7]. При этом решением уравнения (1) мы всюду разумеем нетривиальное решение этого уравнения. В работе встретится тоже понятие строго обратной функции, введенное в работе [8]. Свойства решения уравнения (1) с целым коэффициентом взяты нами из работы [6]. Ради сравнения с дальнейшими результатами приведем некоторые из них в следующей теореме:

Теорема 1. *Если уравнение* (1) *имеет целый коэффициент* $Q(x) \not\equiv 0$, *то справедливы утверждения:*

1. *Существует не более двух классов решений этого уравнения с конечным числом нулей и не более двух классов решений, производная которых имеет конечное число нулей.*

2. *Если* u, v — *фундаментальная система решений этого уравнения, то модуль частного* u/v, *равно как и* u'/v' *неограничен.*

3. *Уравнение* (1) *однозначно определено нулевыми точками своих решений.*

Доказательство. Первое утверждение содержится в теоремах 3 и 4 в работе [6]. Из него при помощи леммы 5 в работе [7] вытекает, что функция u/v, или же u'/v', принимает все значения из замкнутой плоскости за исключением, не превышающим двух. Поэтому справедливо и второе утверждение. Третье является следствием вспомогательной теоремы 10 из [7].

Совершенно другими свойствами обладает дифференциальное уравнение (1), определенное в односвязной области, отличной от открытой плоскости. Чтобы доказать это, приведем предварительно несколько вспомогательных теорем. Первая из них равносильна главной теореме конформного отображения (сравнить с леммой 2, [7]).

Лемма 1. *Пусть* T — *односвязная область, дополнение которой (относительно закрытой плоскости) содержит более одной точки, и пусть дополнение области* U *содержит более двух точек. Существует функция* f, *которая мероморфна и локально одно-однозначна в области* T *и которая отображает эту область на область* U, *причем обратная к ней функция* f^{-1} *является строго обратной и произвольно продолжаемой в области* U. *Функция* f *однозначно определена условием, чтобы она в данной точке* $x_0 \in T$ *принимала заданное значение* $z_0 \in U$ *и чтобы главное значение* $\operatorname{Arg} f'(x_0)$ *равнялось заданному значению* $\varphi_0 \in \langle 0, 2\pi)$. *Каждая функция* f, *мероморфная и локально одно-однозначная в области* T, *отображающая эту область на область* U, *является или одно-однозначной или каждое из своих значений принимает в бесконечном числе точек.*

Доказательство. Для доказательства эквивалентности этой леммы с леммой 2, [7], достаточно доказать, что функции, фигурирующие в этих леммах являются взаимно обратными, так что из существования одной из них вытекает существование другой и наоборот. При этом в лемме 2 следует вместо единичного круга K рассматривать область T.

Если функция w аналитична, произвольно продолжаема и унивалентна в области U и притом отображает эту область на область T, то обратная к ней функция f является по теореме 4, [8] строго обратной, мероморфной и локально одно-однозначной в T и отображает область T на область U. При этом надо учесть, что дополнение области T не может содержать изолированных точек. Функция же f имеет, в силу следствия вспомогательной теоремы 2′, [8], строго обратную функцию w, которая по предположению произвольно продолжаема в области U.

Наоборот, если f мероморфна и локально одно-однозначна в области T и отображает эту область на G, причем обратная к ней функция w является строго обратной и произвольно продолжаемой в области G, то из теоремы 5, [8], вытекает, что функция w унивалентна в G и отображает эту область на область T.

Лемма 2. *Пусть $z_1(x)$ — функция, мероморфная и локально одно-однозначная в области T ($\infty \notin T$) и пусть $z_1(T) = U$. Тогда дифференциальное уравнение*

$$y'' = Q_1(x)\, y\,, \tag{1_1}$$

где

$$Q_1(x) = -\{z_1, x\}\,, \tag{3}$$

определено в области T и обладает следующим свойством: Существует одно-однозначное отображение Z множества классов его решений на замкнутую плоскость E, в котором точкам дополнения U соответствуют классы решений уравнения (1_1), которые не имеют ни одной нулевой точки, и точке $c \in U$ соответствует класс решений уравнения (1_1), нулевые точки которых совпадают с c-точками функции z_1.

Доказательство. Из вспомогательной теоремы 9, [7], вытекает, что функция Q_1 является в области T голоморфной, и поэтому уравнение (1_1) в этой области определено. Функция z_1 является решением дифференциального уравнения (2) с коэффициентом Q_1. Следовательно, можно записать ее в виде частного двух линейно независимых решений уравнения (1_1). Из леммы 5, [7], вытекает существование отображения Z с приведенным свойством.

Свойствам решений уравнения (2) посвящена следующая вспомогательная теорема.

Лемма 3. *Дифференциальное уравнение (2), определенное в односвязной области T ($\infty \notin T$) обладает таким свойством: Если одно из решений этого уравнения имеет строго обратную функцию, то все решения уравнения (2) имеют строго обратную функцию. Далее, если обратная функция одного из решений z_1 уравнения (2) произвольно продолжаема в области значений H_1 функции z_1, то* *обратная функция каждого решения z этого уравнения произвольно продолжаема в области значений H функции z.*

Доказательство. Произвольное решение z уравнения (2) представляет мероморфную функцию и может быть выражено при помощи одного решения z_1 этого уравнения в виде сложной функции hz_1, где h — дробно-линейное преобразование. Если через h^{-1}, z_1^{-1} обозначить обратные функции к функциям h, z_1, то функция z^{-1}, обратная к функции z, имеет вид $z^{-1} = z_1^{-1}h^{-1}$. Если z_1^{-1} произвольно продолжаема в области H_1, то $z_1^{-1}h^{-1}$ произвольно продолжаема в области H, $H = h(H_1)$.

Мы еще покажем, что в случае, когда z_1 имеет строго обратную функцию, то и hz_1 имеет строго обратную функцию. Поскольку z_1 как решение уравнения (2) имеет только простые элементы, вытекает из теоремы 5, [8], что z_1^{-1} является унивалентной, что она определена в H_1 и отображает эту область на T. Сложная функция $z_1^{-1}h^{-1}$ унивалентна, аналитична и определена в области H. По теореме 4, [8], она имеет строго обратную функцию w, которая аналитическа в области $T_1 \supset T$. Ее ветвью в T служит hz_1. Если $w = hz_1$, то из следствия 2 за леммой 2′, [8], вытекает, что hz_1 имеет тоже строго обратную функцию. Функция w может, в силу теоремы 4, [8], кроме всех элементов функции hz_1 содержать еще непростой элемент с центром в одной точке дополнения области T, а именно в точке ∞. Если она имеет такой элемент, то hz_1 и равно и w рациональные функции. Притом она локально одно-однозначна на открытой плоскости.

Утверждение. Если рациональная функция w локально-одно-однозначна на открытой плоскости, то она одно-однозначна на замкнутой плоскости. Действительно, займемся ее обратной функцией, w^{-1}. Точки разветвления римановой поверхности R^{-1} этой функции являются значениями непростых элементов функции w в их центре, так что R^{-1} может иметь самое больше одну точку разветвления. Из этого далее вытекает, что она не имеет ни одной точки разветвления, и функция w является одно-однозначной на замкнутой плоскости. Поэтому w не имеет ни одного непростого элемента и совпадает с hz_1, ч. т. д.

При помощи этих лемм докажем теперь теорему 2.

Теорема 2. *Пусть T — односвязная область, $\infty \notin T$, отличная от открытой плоскости. Тогда справедливы утверждения:*

1. *Если p — произвольное целое неотрицательное число или $p = +\infty$, существует дифференциальное уравнение* (1), *обладающее следующими свойствами:*

a) *Оно имеет точно p классов ненулевых решений (т. е. таких решений, которые не имеют ни одной нулевой точки), причем для $p = +\infty$ существует уравнение* (1), *которое имеет счетное число классов ненулевых решений, и еще такое уравнение* (1), *которое имеет несчетное количество классов ненулевых решений.*

b) *Каждое решение этого уравнения, которое имеет по крайней мере один нуль, имеет их бесконечно много.*

c) *Если* $p \geqq 3$, *то обратная функция каждого решения* z *соответствующего уравнения* (2) *строго обратна и произвольно продолжаема в области значений* H *функции* z.

2. *Существует дифференциальное уравнение* (1), *определенное в области* T, *решения которого не имеют больше чем по одной нулевой точке. Каждое такое уравнение имеет несчетное число классов ненулевых решений.*

3. *Существуют два различных дифференциальных уравнения* (1), *которые определены в области* T *и все решения которых имеют одинаковые нули. При этом обратная функция каждого решения* z *соответствующих им уравнений* (2) *является строго обратной и произвольно продолжаемой в области значений* H *функции* z.

4. *Существует дифференциальное уравнение* (2), *определенное в области* T, *одно решение которого имеет ограниченный модуль в области* T.

5. *Если область* T *обладает таким свойством, что ее можно поместить в некоторой полосе или в некотором квадранте* (*причем квадрантом разумеется любая область, ограниченная парой взаимно перпендикулярных прямых*), *то в ней существует уравнение* (1), *каждое решение* u *которого выделяется тем, что по крайней мере одна из функций* u, u' *не имеет ни одного нуля.*

Доказательство 1. Если $p \geqq 3$, то по лемме 1 существует функция z_1, которая мероморфна, локально одно-однозначна в области T (в дальнейшем мы будем эту функцию называть значительной функцией в области T) и отображает эту область на область U, дополнение которой имеет как раз p точек. Поскольку область U не является односвязной, функция z_1 принимает каждое из своих значений в бесконечном числе точек. Обратная к ней функция z_1^{-1} строго обратна и произвольно продолжаема в области U. Функция z_1 служит решением дифференциального уравнения (2) с коэффициентом Q_1, определенным соотношением (3). Из этого при помощи леммы 3 вытекает свойство c) этого уравнения. Уравнение же (1) с коэффициентом Q_1 имеет по лемме 2 свойства a) и b).

Пусть теперь p — некоторое из чисел 0, 1, 2. Обозначим через H область, которая получается из замкнутой плоскости E удалением точек $0, 1, \infty$. По доказанному существует в области T значительная функция g, отображающая область T на H и принимающая каждое из своих значений в бесконечном числе точек области T. Если мы еще найдем значительную функцию h в области H, дополнение области значений которой содержит точно p точек, то сложная функция hg будет иметь все свойства, которые гарантируют верность утверждения 1 и в данном случае. Существование функции h можно доказать рассуждениями о дифференциальном уравнении (1) с целым коэффициентом Q. Из результатов работы [6] известно, что в случае, когда Q — многочлен степени n, где n — нечетное число, каждое решение этого уравнения имеет нецелый порядок ([6], стр. 227) и, следовательно, по теореме Бореля имеет бесконечное число нулевых точек. Далее мы знаем, что существует уравнение (1) с целым коэффициентом, два решения которого имеют наперед заданные нули ([6], стр. 245).

Если $p = 0$, рассмотрим частное $z = u/v$ двух линейно независимых решений уравнения (1), в котором Q является многочленом нечетной степени. Функция z является значительной на открытой плоскости E_0 и из приведенного выше результата по лемме 5, [7], вытекает, что она принимает каждое значение из E в бесконечном числе точек. Тем же свойством обладает и ее ветвь h в области H. Если $p = 1$, то рассмотрим частное $z_2 = u/v$ двух линейно независимых решений уравнения (1) с целым коэффициентом, причем 0 является единственным нулем решения u и точка i — единственным корнем v. Функция z_2 отображает E_0 на E и область H на область $E - \{0\}$. Это вытекает из того обстоятельства, что в силу теоремы 1 функция z_2 за исключением точек $z_2(0) = 0$, $z_2(i)$ принимает все свои значения, значит, и $z_2(1)$ бесконечное число раз. Искомой функцией h является тогда ее ветвь в области H. Случай $p = 2$ отличается от предыдущего тем, что занимаемся уравнением (1) с целым коэффициентом, которое имеет два ненулевых решения. Снова мы получим значительную функцию z_3 в области E_0, дополнение области значений которой состоит опять из двух элементов, и тем же свойством обладает и ее ветвь h в области H.

2. Пусть f — произвольное конформное отображение области T. Дополнение области $f(T)$ имеет несчетное количество точек. Поскольку f является значительной в области T, существует в силу леммы 2 уравнение (1), определенное в T и имеющее свойства, приведенные в утверждении 2.

3. Займемся областью G, которая не является односвязной и которая обладает тем свойством, что существует конформное отображение F этой области, отличное от дробно-линейного преобразования. Такой областью может, например, служить область, дополнение которой содержит по крайней мере два элемента, причем хотя бы один из них не вырождается в точку ([9], стр. 225). По лемме 1 мы знаем, что существует значительная функция w в области T со свойством $w(T) = G$. Эта функция принимает каждое из своих значений бесконечное число раз и имеет строго обратную функцию w^{-1}, которая является аналитической и произвольно продолжаемой в области G. Опять-таки обратная функция к функции Fw аналитическая в области $F(G)$ и, как легко видеть, совпадает с $w^{-1}F^{-1}$. Так как w^{-1} унивалентна (теорема 5, [8]), то и $w^{-1}F^{-1}$ унивалентна и имеет строго обратную функцию. Поскольку дополнение области T не имеет изолированных точек, этой функцией будет Fw (теорема 4, [8]). По следствию 2 вспомогательной теоремы 2', [8], и функция Fw имеет строго обратную функцию, а именно $w^{-1}F^{-1}$. Очевидно, что и эта обратная функция произвольно продолжаема в области $F(G)$. Согласно лемме 2, обе значительные функции w, Fw определят в области T дифференциальные уравнения вида (1), которые по теореме 10 и по лемме 10, [7], имеют все решения с одними и теми же нулями и притом взаимно различны. Каждое решение этих уравнений, которое имеет хоть один нуль, имеет их бесконечно много. Свойства соответствующих уравне-

ний (2) вытекает из свойств обратных функций к функциям w или же Fw, на основании леммы 3.

4. Утверждение вытекает из существования значительной функции в области T, отображающей эту область на ограниченную область.

5. По теореме 5 и по следствию теоремы 8, [7], существует в области T дифференциальное уравнение (1) с непостоянным коэффициентом, которое обладает свойством A первого (второго) типа. Из этого вытекает утверждение 5.

Теперь мы приведем некоторые другие свойства дифференциальных уравнений (1), решения которых обладают свойствами, перечисленными в теореме 2.

Теорема 3. *Пусть T — односвязная область, $\infty \notin T$, отличная от открытой плоскости. Если существует решение z уравнения* (2), *определенного в области T, которое имеет строго обратную функцию, произвольно продолжаемую в области значений H функции z, то для решений соответствующего уравнения* (1) *справедливо точно одно из следующих утверждений:*

1. *Каждое решение уравнения* (1) *имеет самое больше одну нулевую точку.*

2. *Уравнение* (1) *имеет по крайней мере три класса решений без нулей. Каждое другое решение этого уравнения имеет бесконечное число нулей.*

Доказательство. Если z одно-однозначна, то каждое решение уравнения (1) имеет, согласно вспомогательной теореме 5, [7], самое больше одну нулевую точку. Если z не является одно-однозначной, может дополнение области H содержать самое больше две точки или же более двух точек. Поступая аналогично доказательству второй части теоремы 7, [8], придем к заключению, что первый случай не может наступить, а второй только таким образом, в силу леммы 1, что функция z принимает каждое из своих значений в бесконечном числе точек, откуда вытекает утверждение теоремы.

Напротив, если T является открытой плоскостью E_0, справедлива теорема 4.

Теорема 4. *Дифференциальное уравнение* (2) *с целым коэффициентом имеет решение z, обратная функция z^{-1} которого строго обратна и произвольно продолжаема в области значений H функции z тогда и только тогда, если оно имеет постоянный коэффициент.*

Доказательство. Прежде всего имеет место утверждение, что обратная функция z^{-1} к решению z каждого уравнения (2) строго обратна. Если, то есть, z рациональна, то из ее локальной одно-однозначности вытекает, что она одно-однозначна и, следовательно, ввиду следствия теоремы 5, [8], z^{-1} строго обратна. Если z не является рациональной, то эта функция аналитическа не только на E_0, но и на замкнутой плоскости, что по теореме 3, [8], приводит нас к тому же результату. Пусть z^{-1} еще произвольно продолжаема. Если область H односвязна, то по теореме о монодромии z^{-1} однозначна, и поскольку кроме того она еще унивалентна (теорема 5, [8]), то она одно-однозначна. Функция z является тогда конформным отображением области E_0, значит, дробно-линейным преобразованием; последнее удовлетворяет уравнению (2) с коэффициентом $Q(x) \equiv 0$. Если H не является односвязной областью, то ее дополнение CH содержит именно две точки, потому что каждое решение уравнения $\{z, x\} \equiv 0$ представляет дробно-линейное преобразование, и последнее отображает E_0 на замкнутую плоскость без одной точки, а решение уравнения (2) с целым коэффициентом $Q(x) \not\equiv 0$ имеет опять область значений, дополнение которой имеет не более двух точек. Это вытекает из теоремы 1 при помощи леммы 5, [7]. Рассматривая в случае надобности функцию hz, где h — дробно-линейное преобразование, можем предполагать, что CH состоит из точек 0 и ∞. При этом hz является тоже решением уравнения (2) и по лемме 3 имеет те же свойства как и z. Из произвольной продолжаемости функции z^{-1} в области H вытекает, что сложные функции $z^{-1}(e^x)$ произвольно продолжаемы на E_0 и что они отображают эту область на себя. По теореме о монодромии это целые функции. Пусть f — некоторая из этих функций. Она, очевидно, непостоянна, и по тем же причинам как функция z имеет строго обратную функцию f^{-1}. Переходя к элементам, убеждаемся, что f^{-1} выполняет равенство

$$f^{-1} = \log z\,. \tag{4}$$

Потому что эта функция произвольно продолжаема в односвязной области, она однозначна. Помимо этого она унивалентна. Поэтому f — одно-однозначная и линейная функция. Из соотношения (4) мы для z получим выражение $z = e^{L(x)}$, $L(x)$ — линейная функция, из которого вытекает, что z удовлетворяет уравнению (2) с постоянным коэффициентом, отличным от нуля. Наоборот, если уравнение (2) имеет ненулевой постоянный коэффициент, то каждое его решение имеет вид $h[e^{L(x)}]$, где h — дробно-линейное преобразование. Эта функция имеет произвольно продолжаемую обратную функцию. То же самое можно утверждать и об уравнении $\{z, x\} \equiv 0$.

Теорема 5. *Пусть T — односвязная область, $\infty \notin T$, отличная от открытой плоскости, и $p \geqq 2$ — натуральное число. Не существует дифференицальное уравнение вида* (1), *определенное в T, каждое решение которого, имея по крайней мере один нуль, имело бы их как раз p.*

Доказательство. Если бы существовало такое уравнение, то по лемме 5, [7], каждое решение соответствующего уравнения (2) было бы точно p-валентной функцией в области T. Но в односвязной области не существует по теореме 7, [8], такой функции.

Теорема 6. *Пусть T — односвязная область, $\infty \notin T$, отличная от открытой плоскости. Если каждое решение u уравнения* (1), *определенного в T, имеет то свойство, что хотя бы одна из функций u, u' не имеет ни одной нулевой точки, то:* 1. *существует несчетное количество решений u этого уравнения таких, что функция uu' не имеет ни одного нуля, и* 2. *существуют две фундаментальные* *системы* u_1, v_1 *и* u_2, v_2 *решений этого уравнения, для которых модуль частных* u_1/v_1, u_2'/v_2' *ограничен.*

Доказательство. Пусть u, v — пара линейно независимых решений уравнения (1), удовлетворяющих условиям теоремы. На основании вспомогательных теорем 5 и 6, [7], области значений H_1 и H_2 частных u/v, u'/v' не пересекаются. Поэтому дополнения этих областей содержат внутренние точки. Из этого вытекает, что существуют дробно-линейные преобразования h_1, h_2 так, что сложные функции $h_1(u/v)$ или же $h_2(u'/v')$ имеют ограниченный модуль. Функцию $h_1(u/v)$ можно писать в виде частного u_1/v_1 фундаментальной системы решений уравнения (1); аналогично $h_2(u'/v') = u_2'/v_2'$. Этим доказана вторая часть теоремы. Первая часть вытекает при помощи лемм 5 и 6, [7], из того обстоятельства, что дополнение открытого несвязного множества $H_1 \cup H_2$ содержит несчетное количество точек.

Теорема 7. *Пусть* T — *односвязная область, отличная от открытой плоскости,* $\infty \notin T$, *и* $f(x)$ — *произвольное конформное отображение области* T *на единичный круг* $K : |z| < 1$. *Тогда выполняется следующее: Если существует пара* u_1, v_1 *линейно независимых решений уравнения* (1), *определенного в области* T *так, что частное* u_1/v_1 *ограничено (или же частное* u_1'/v_1' *от деления их производных ограничено) и если* $\{x_n\}$ — *последовательность нулевых точек произвольного решения* y *уравнения* (1) *(или же* $\{x_n\}$ — *последовательность нулевых точек производной от функции* y*), то*

1. *ряд* $\sum_n (1 - |f(x_n)|)$ *сходится;*

2. *к каждой паре* u, v *линейно независимых решений уравнения* (1) *существует положительная константа* $k = k(u, v)$, *обладающая тем свойством, что неевклидово расстояние точек* $f(x_\nu)$, $f(x_\mu)$, *где* x_ν — *произвольный нуль решения и и* x_μ — *произвольный нуль решения* v *(или же* x_ν *и* x_μ *являются нулями производных от функций* u *и* v*) больше или равна* k.

Из ограниченности частного u_1/v_1 *далее вытекает, что уравнение* (1) *не определено нулевыми точками своих решений однозначно и что оно имеет несчетное количество решений, которые не имеют ни одного нуля.*

Доказательство. Займемся частным u_1/v_1. Поскольку произведение $c\, u_1/v_1$, c — постоянная, тоже является частным фундаментальной системы решений уравнения (1), можем предполагать, что $|u_1/v_1| < 1$ в области T. Сложная функция $(u_1/v_1)(f^{-1})$, где f^{-1} — обратная функция к функции f, голоморфна и унимодулярно ограничена в круге K. Если x_n — c-точки функции u_1/v_1, то точки $f(x_n)$ и только эти точки являются c-точками функции $(u_1/v_1)(f^{-1})$. По теореме Блажке ([10], стр. 136) ряд $\sum_n (1 - |f(x_n)|)$ сходится для каждого c. Далее, из теоремы Пика ([9], стр. 225) получаем, что в случае, когда $f(x_\nu)$ являются c-точками функции $(u_1/v_1)(f^{-1})$ и $f(x_\mu)$ d-точками этой функции, неевклидово расстояние точек $f(x_\nu), f(x_\mu)$ больше или равно неевклидовому расстоянию точек c, d. Последнее обозначим через k. Используя вспомогательную теорему 5, [7], (или же вспомогательную теорему 6, [7]), получим из предыдущих теорем первую часть утверждения доказываемой теоремы. Вторая часть теоремы вытекает из того, что область значений H функции u_1/v_1 имеет дополнение с несчетным количеством точек и что существует конформное отображение F области H, которое не является дробно-линейным преобразованием. Согласно лемме 2 сложная функция $F(u_1/v_1)$ определяет дифференциальное уравнение вида (1), все решения которого имеют те же нулевые точки, как наше уравнение.

Теперь рассмотрим дифференциальное уравнение (1) с ограниченным коэффициентом, определенное в выпуклой области T. Такая область является частным случаем односвязной области. Справедлива теорема 8.

Теорема 8. *Пусть дифференциальное уравнение* (1) *определено в выпуклой области* T $(\infty \notin T)$ *и пусть в каждой точке* $x \in T$ *выполняется для его коэффициента* $Q(x)$ *неравенство* $|Q(x)| \leqq M$. *Тогда каждое решение* y *этого уравнения обладает таким свойством:*

1. *Расстояние двух нулевых точек функции* y *больше или равно* $\pi/\sqrt{M}$.
2. *Расстояние от произвольной нулевой точки решения* y *до произвольной нулевой точки его производной* y' *больше или равно* $\pi/(2\sqrt{M})$.

Эти оценки нельзя улучшить.

Доказательство. Решение y дифференциального уравнения (1) выполняет интегральное равенство, которое мы будем в честь математика, который открыл его, называть равенством Хилля (Hille, [11], стр. 353, [12], стр. 30):

$$[\overline{y(x)}\, y'(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} |y'(x)|^2\, \overline{\mathrm{d}x} - \int_{x_1}^{x_2} |y(x)|^2\, Q(x)\, \mathrm{d}x = 0\,.$$

В нем x_1, x_2 — две произвольные, но фиксированные точки из области T, интегрирование производится по спрямляемой кривой, лежащей в T.

В дальнейшем мы выберем подходящим образом x_1, x_2. Рассмотрим два случая. Во-первых, x_1, x_2 будут означать две нулевые точки решения y, во-вторых, x_1 будет нулем функции y, а x_2 нулем ее производной. В обоих случаях получим из равенства Хилля равенство

$$\int_{x_1}^{x_2} |y'(x)|^2\, \overline{\mathrm{d}x} = - \int_{x_1}^{x_2} |y(x)|^2\, Q(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{5}$$

В качестве интегральной кривой можем, ввиду выпуклости области T взять отрезок с крайними точками x_1, x_2. Уравнение его имеет вид $x = x_1 + (x_2 - x_1)\, t$, $0 \leqq t \leqq 1$. Если обозначить $y(x) = y_1(t)$, $Q(x) = Q_1(t)$, то $y_1'(t) = y'(x)\,(x_2 - x_1)$ и равенство (5) примет вид

$$\frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \int_0^1 |y_1'(t)|^2\, \mathrm{d}t = - \int_0^1 Q_1(t)\, |y_1(t)|^2\, \mathrm{d}t\,. \tag{6}$$

Далее мы обозначим $y_1(t) = u(t) + iv(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, u, v — действительные. Можем писать

$$(6') \qquad \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \int_0^1 [u'^2(t) + v'^2(t)] \, \mathrm{d}t = - \int_0^1 Q_1(t) \, [u^2(t) + v^2(t)] \, \mathrm{d}t \, ,$$

откуда

$$(7) \qquad \frac{1}{|x_2 - x_1|^2} \int_0^1 [u'^2(t) + v'^2(t)] \, \mathrm{d}t \leqq M \int_0^1 [u^2(t) + v^2(t)] \, \mathrm{d}t$$

ввиду неравенства $|Q(x)| \leqq M$.

В первом случае из равенств $y(x_1) = y(x_2) = 0$ получаем $u(0) = u(1) = v(0) = v(1) = 0$, и поэтому для функций u, v имеет место неравенство

$$(8) \qquad \int_0^1 u^2(t) \, \mathrm{d}t \leqq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 u'^2(t) \, \mathrm{d}t \, ,$$

которое мы получим из равносильного неравенства в [13], стр. 185. Если на основании его оценить правую часть неравенства (7), то мы получим $1/|x_2 - x_1|^2 \leqq M/\pi^2$, откуда

$$(9) \qquad |x_2 - x_1| \geqq \frac{\pi}{\sqrt{M}} \, , \quad \text{ч. т. д.}$$

Во втором случае из $y(x_1) = 0$ вытекает $u(0) = v(0) = 0$ и вместо неравенства (8) имеем для функций u, v, согласно [13], стр. 182, неравенство

$$(10) \qquad \int_0^1 u^2 \, \mathrm{d}t \leqq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^1 u'^2 \, \mathrm{d}t \, .$$

Поступая аналогичным образом, как и прежде, получаем, что

$$(11) \qquad |x_2 - x_1| \geqq \frac{\pi}{2\sqrt{M}} \, .$$

Дифференциальное уравнение с постоянным коэффициентом $y'' = My$ обладает тем свойством ([6], стр. 234), что, за исключением решений $e^{\sqrt{(M)}x}$, $\bar{e}^{\sqrt{(M)}x}$, которые, равно как их производные, не имеют ни одной нулевой точки, нули решения y этого уравнения и его производной y' лежат на одной прямой и отделяют друг друга. При этом расстояние двух соседних нулей y равно $\pi/\sqrt{M}$ и расстояние нулевой точки y от самого близлежащего нуля производной y' равно $\pi/2\sqrt{M}$, так что оценки (9) и (11) нельзя улучшить.

Следствие 1. *Если дифференциальное уравнение* (1) *определено в ограниченной выпуклой области T и модуль $|Q(x)|$ его коэффициента является ограниченным в T, то каждое его решение имеет конечное число нулей в области T.*

Доказательство. Если постоянная $M > 0$ такова, что $|Q(x)| \leqq M$ для $x \in T$, то мы для каждой точки x_0 из замыкания $\bar{T}$ области T рассмотрим ее круговую окрестность $K_{x_0} : |x - x_0| < \pi/2\sqrt{M}$. Области K_{x_0} покрывают в сумме замкнутую ограниченную область $\overline{T}$. Следовательно, существует конечное число $K_{x_1}, \ldots, K_{x_p}$ этих областей, которые покрывают в сумме T. Таким же свойством обладают пересечения $K_{x_i} \cap T = L_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Их диаметр достигает самое больше значения $\pi/\sqrt{M}$ и они выпуклы. По теореме 8 каждое решение уравнения (1) имеет не больше чем один нуль в L_i, значит, в целой области T их имеет конечное число ч. т. д.

Следствие 2. *Если дифференциальное уравнение* (1) *определено в выпуклой области T ($\infty \notin T$) и если в каждой точке x этой области выполняется неравенство*

$$(12) \qquad \left| Q(x) - \left\{ \int Q(x)\, \mathrm{d}x, x \right\} \right| \leqq M_1\,, \quad (M_1 > 0)\,,$$

то расстояние между двумя нулями производной каждого решения y уравнения (1) *больше или равно $\pi/\sqrt{M_1}$. Эту оценку нельзя улучшить.*

Доказательство. Из неравенства (12) и из замечания к лемме 7 ([7]) вытекает, что $Q(x) \neq 0$ и одновременно и то, что $Q(x) - \{\int Q(x)\, \mathrm{d}x, x\}$ голоморфна. По доказателству этой теоремы известно, что функция $y'/\sqrt{Q}$ является решением дифференциального уравнения

$$(13) \qquad y'' = \left[Q(x) - \left\{ \int Q(x)\, \mathrm{d}x, x \right\} \right] y\,,$$

к которому применим теорему 8. Если $Q(x)$ равно постоянной M_1, то уравнение (13) сводится к уравнению (1) с коэффициентом M_1, для которого мы уже доказали, что упомянутую оценку нельзя улучшить.

Замечание. Пункт 1. в теореме 8 был уже доказан в нескольких работах ([14], [1], [4]), и мы привели его только ради полности.

Для расстояния между двумя нулями производной решения дифференциального уравнения (1) можно дать и другую оценку, чем ту, которую мы привели в следствии 2 теоремы 8.

Теорема 9. *Пусть дифференциальное уравнение* (1) *определено в выпуклой области T ($\infty \notin T$) и пусть в каждой точке x этой области имеет место неравенство $|Q(x)| \leqq M$. Обозначим через K наименьшее замкнутое выпуклое множество, которое содержит множество $Q(T)$ и через m расстояние множества K от точки 0. Пусть $m > 0$ (т. е. $0 \notin K$). Тогда расстояние между двумя нулями x_1, x_2 производной каждого решения y уравнения* (1) *больше или равно $(\pi/M)\sqrt{m}$. Эту оценку нельзя улучшить.*

Доказательство. Поскольку выполнены предположения теоремы 8, можем поступать также, как при ее доказательстве. Сохраним и обозначения, использованные там. Потому что $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$, равенство Хилля примет вид $(6')$, который запишем следующим образом:

$$(6'') \qquad -(x_2 - x_1)^2 \int_0^1 Q_1(t)\,[u^2(t) + v^2(t)]\,\mathrm{d}t = \int_0^1 [u'^2(t) + v'^2(t)]\,\mathrm{d}t\,.$$

Далее отсюда имеем $y_1'(0) = y_1'(1) = 0$, что в росписи дает $u'(0) = u'(1) = v'(0) = v'(1) = 0$. К функциям u' и v' можно применить неравенство (8), из которого получим

$$(14) \qquad \int_0^1 [u'^2(t) + v'^2(t)]\,\mathrm{d}t \leqq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 [u''^2(t) + v''^2(t)]\,\mathrm{d}t\,.$$

Однако $y_1'(t) = y'(x)(x_2 - x_1)$, откуда $y_1''(t) = y''(x)(x_2 - x_1)^2 = Q(x)\,y(x)\,.\,(x_2 - x_1)^2 = Q_1(t)\,y_1(t)\,(x_2 - x_1)^2$
и

$$u''^2(t) + v''^2(t) = |y_1''(t)|^2 = |Q_1(t)|^2\,.\,|x_2 - x_1|^4\,(u^2(t) + v^2(t)) \leqq$$
$$\leqq M^2 |x_2 - x_1|^4\,[u^2(t) + v^2(t)]\,.$$

Из этого неравенства и из неравенства (14) вытекает неравенство

$$(15) \qquad \int_0^1 [u'^2(t) + v'^2(t)]\,\mathrm{d}t \leqq \frac{M^2}{\pi^2}\,|x_2 - x_1|^4 \int_0^1 [u^2(t) + v^2(t)]\,\mathrm{d}t\,.$$

Теперь мы будем преобразовывать правую часть равенства $(6'')$. По теореме Вейерштрасса о среднем значении ([15], стр. 114) будет

$$(16) \qquad -(x_2 - x_1)^2 \int_0^1 Q_1(t)\,[u^2(t) + v^2(t)]\,\mathrm{d}t = -(x_2 - x_1)^2\,\mu\,.$$
$$.\int_0^1 [u^2(t) + v^2(t)]\,\mathrm{d}t\,.$$

где $\mu \in K$ – некоторое число. Поскольку дело касается неотрицательного выражения, правая часть этого равенства имеет значение

$$|x_2 - x_1|^2\,|\mu| \int_0^1 [u^2(t) + v^2(t)]\,\mathrm{d}t\,.$$

Учитывая неравенство $|\mu| \geqq m$, получаем отсюда неравенство

$$(17) \quad -(x_2 - x_1)^2 \int_0^1 Q_1(t)[u^2(t) + v^2(t)]\,\mathrm{d}t \geqq m|x_2 - x_1|^2 \int_0^1 [u^2(t) + v^2(t)]\,\mathrm{d}t\,.$$

Из неравенств (15) и (17) в силу равенства $(6'')$ вытекает неравенство

$$m \leqq \frac{M^2}{\pi^2}\,|x_2 - x_1|^2\,,$$

откуда

$$(18) \qquad |x_2 - x_1| \geqq \frac{\pi}{M}\sqrt{m}\,,$$

ч. т. д.

Если дифференциальное уравнение (1) имеет вид $y'' = My\,(M > 0)$, то множество $K = \{M\}$ и $m = M$, так что неравенство (18) имеет тогда вид $|x_2 - x_1| \geqq \pi/\sqrt{M}$. Из свойств дифференциального уравнения с постоянным коэффициентом вытекает, что в приведенном неравенстве имеет место знак равенства, что мы и хотели доказать.

Следствие. *Если выполнены условия теоремы* 9 *и, кроме этого, T ограничена, то для каждого решения y дифференциального уравнения* (1) *функция yy' имеет не больше, чем конечное число нулей в области T.*

Доказательство. Прежде всего, выполнены условия следствия 1 теоремы 8, так что функция y имеет конечное число нулей в T. Далее можно доказать, что и функция y' имеет только конечное число нулей в области T. Это утверждение доказывается совсем одинаково, как следствие 1 теоремы 8, поэтому мы доказательство проводить не будем.

При помощи равенства Хилля мы докажем следующую теорему, которая посвящена оценке аргумента разности $x_2 - x_1$ двух нулей функции yy', когда y является решением уравнения (1).

Теорема 10. *Пусть дифференциальное уравнение* (1) *определено в выпуклой области T ($\infty \notin T$). Обозначим через K наименьшее замкнутое выпуклое множество, которое содержит $Q(T)$. Путсь существуют два угла $\alpha, \beta : -\pi < \alpha \leqq \pi$, $0 \leqq \beta \leqq \frac{1}{2}\pi$ так, что для всех точек $x \in K$ выполнены неравенства $\alpha - \beta \leqq \operatorname{Arg} x \leqq \alpha + \beta$. При этом знаком $\operatorname{Arg} x$ обозначено то (единственное) из значений $\arg x$, которое находится в интервале $\langle \alpha - \beta, \alpha + \beta \rangle$. Пусть x_1 — произвольная, но фиксированная нулевая точка функции yy', где y является решением дифференциального уравнения* (1). *Тогда каждый из следующих нулей функции yy' лежит внутри углов, данных неравенствами*

$$\tag{19} \tfrac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta) \leqq \operatorname{Arg}(x - x_1) \leqq \tfrac{1}{2}(\pi - \alpha + \beta)$$

или же

$$\tag{20} \tfrac{1}{2}(3\pi - \alpha - \beta) \leqq \operatorname{Arg}(x - x_1) \leqq \tfrac{1}{2}(3\pi - \alpha + \beta)\,.$$

В этих неравенствах символом $\operatorname{Arg}(x - x_1)$ обозначено то (единственное) из значений $\arg(x - x_1)$, которое лежит в интервале $\langle \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta), \frac{1}{2}(3\pi - \alpha + \beta)\rangle$. Оценки (19) *и* (20) *нельзя улучшить.*

Доказательство. Исходным пунктом послужит нам равенство Хилля для решения y дифференциального уравнения (1), в котором в качестве x_2 возьмем произвольную нулевую точку функции yy' отличную от x_1. Таким образом мы придем к равенству (5). Если мы будем интегрировать его по отрезку, причем воспользуемся обозначениями из доказательства теоремы 8, получим равенство (6″). Левую часть (6″) выразим при помощи (16), так что получим

$$\tag{21} -(x_2 - x_1)^2\,\mu = k > 0\,,$$

где $\mu \in K$ — какое-то число и $k = \{\int_0^1 [u'^2(t) + v'^2(t)]\,dt\}/\{\int_0^1 [u^2(t) + v^2(t)]\,dt\}$. Перейдя к аргументам, получим отсюда

$$2 \arg(x_2 - x_1) + \arg \mu = \pi(1 + 2n), \quad n \text{ целое.}$$

Отсюда следует

$$\arg(x_2 - x_1) = \pi(\tfrac{1}{2} + n) - \tfrac{1}{2} \arg \mu . \tag{22}$$

Вследствие того, что для $\arg \mu$ справедливы неравенства

$$\alpha - \beta + 2n_1\pi \leqq \arg \mu \leqq \alpha + \beta + 2n_1\pi , \quad n_1 - \text{целое},$$

для $-\frac{1}{2}\arg \mu$ будут выполняться соотношения

$$\tfrac{1}{2}(-\alpha - \beta) - n_1\pi \leqq -\tfrac{1}{2} \arg \mu \leqq \tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta) - n_1\pi ,$$

откуда при помощи (22) вытекают неравенства

$$\tfrac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta) + (n - n_1)\pi \leqq \arg(x_2 - x_1) \leqq \tfrac{1}{2}(\pi - \alpha + \beta) + (n - n_1)\pi .$$

Ит этого следует, что $\operatorname{Arg}(x_2 - x_1)$ выполняет или неравенство (19) или (20). При этом в интервалах $\langle \alpha - \beta, \alpha + \beta \rangle$, $\langle \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta), \frac{1}{2}(3\pi - \alpha + \beta) \rangle$ существует только одно значение $\arg x$, потому что их длина не превышает 2π.

Для дифференциального уравнения $y'' = k_1 y$, $k_1 > 0$ будет $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и неравенства (19) и (20) примут вид $\operatorname{Arg}(x - x_1) = \frac{1}{2}\pi$ или же $\operatorname{Arg}(x - x_1) = \frac{3}{2}\pi$, что означает прямую, перпендикулярную к вещественной оси, проходящую через нулевую точку x_1 функции yy'. Известно, что остальные нули этой функции действительно лежат на этой прямой, и поэтому оценки (19) и (20) нельзя улучшить.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y'' = Q(x)\,y$ определенное в выпуклой области $T\,(\infty \notin T)$, в которой $\operatorname{Re}\{Q(x)\} \geqq 0$. Значит, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}\pi$ и неравенства (19) и (20) имеют вид

$$\tfrac{1}{4}\pi \leqq \arg(x - x_1) \leqq \tfrac{3}{4}\pi$$

и

$$\pi + \tfrac{1}{4}\pi \leqq \arg(x - x_1) \leqq \pi + \tfrac{3}{4}\pi .$$

Наконец, мы займемся оценкой модуля решения уравнения (1). Об этом говорится в теореме 11.

Теорема 11. *Эсли дифференциальное уравнение* (1) *определено в выпуклой области T, $\infty \notin T$ и если a, x — две различные точки этой области, то для каждого решения y этого уравнения выполнено неравенство*

$$|y(x)| \leqq (|y(a)| + |y'(a)|\,|x - a|) \exp\left\{\frac{|x - a|^2}{2} \cdot \max_{t \in [a,x]} |Q(t)|\right\} \tag{23}$$

где $[a, x]$ — отрезок с крайними точками a, x.

Доказательство. Известно, что для решения y дифференциального уравнения (1) имеет место интегральное равенство

$$y(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)\,Q(t)\,y(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{24}$$

в котором можно интегрировать по любой регулярной кривой C, лежащей в области T. Пусть C — отрезок, данный уравнением $t = a + \vartheta(x-a)$, $0 \leqq \vartheta \leqq 1$. Обозначим $y_1(\vartheta) = y[a + \vartheta(x-a)]$, $Q_1(\vartheta) = Q[a + \vartheta(x-a)]$. Тогда $y_1'(\vartheta) = y'[a + \vartheta(x-a)]\,.\,(x-a)$ и равенство (24) примет вид

$$y_1(1) = y_1(0) + y_1'(0) + \int_0^1 (x-a)^2(1-\vartheta)\,Q_1(\vartheta)\,y_1(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,.$$

Так как при любом $\vartheta_0 : 0 \leqq \vartheta_0 \leqq 1$

$$\begin{aligned} y_1(\vartheta_0) &= y[a + \vartheta_0(x-a)] = \\ &= y(a) + y'(a)\,\vartheta_0(x-a) + \int_a^{a+\vartheta_0(x-a)} [a + \vartheta_0(x-a) - t]\,Q(t)\,y(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= y_1(0) + y_1'(0)\,\vartheta_0 + \int_0^{\vartheta_0} (x-a)^2(\vartheta_0 - \vartheta)\,Q_1(\vartheta)\,y_1(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |y_1(\vartheta_0)| &\leqq |y_1(0)| + |y_1'(0)|\,\vartheta_0 + \int_0^{\vartheta_0} |x-a|^2(\vartheta_0 - \vartheta)\,|Q_1(\vartheta)|\,|y_1(\vartheta)|\,\mathrm{d}\vartheta \leqq \\ &\leqq |y_1(0)| + |y_1'(0)|\,\vartheta_0 + \int_0^{\vartheta_0} |x-a|^2(1-\vartheta)\,|Q_1(\vartheta)|\,|y_1(\vartheta)|\,\mathrm{d}\vartheta \end{aligned}$$

по вспомогательной теореме в [16], стр. 165, получаем неравенство

$$\begin{aligned} |y_1(1)| &\leqq (|y_1(0)| + |y_1'(0)|)\exp\left\{\int_0^1 |x-a|^2\,|Q_1(\vartheta)|\,(1-\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\right\} \leqq \\ &\leqq (|y_1(0)| + |y_1'(0)|)\exp\left\{|x-a|^2 \max_{\vartheta\in\langle 0,1\rangle} |Q_1(\vartheta)|\,.\,\tfrac{1}{2}\right\}, \end{aligned}$$

так как $\int_0^1 (1-\vartheta)\,d\vartheta = 1/2$. Путем перехода к независимой переменной x получим из этого неравенства неравенство (23), ч. т. д.

Следствие 1. *Если дифференциальное уравнение* (1) *определено в ограниченной выпуклой области T и модуль его коэффициента $Q(x)$ ограничен в этой области, то каждое его решение ограничено в области T.*

Доказательство вытекает из неравенства (23), в котором точку a будем считать закрепленной, а точку x пробегающей область T.

Следствие 2. *Если дифференциальное уравнение* (1) *определено в круге* $|x| < R$ $(0 < R \leqq \infty)$, *то для каждого его решения справедливо неравенство*,

$$M(r, y) \leqq (|y(0)| + |y'(0)|\, r) \exp\left\{\frac{r^2}{2} M(r, Q)\right\}, \quad 0 \leqq r < R,$$

где функции $M(r, Q)$, $M(r, y)$ определены для каждого $r \in \langle 0, R)$ следующим образом:

$$M(r, Q) = \max_{|x| \leqq r} |Q(x)|, \quad M(r, y) = \max_{|x| \leqq r} |y(x)|.$$

Литература

[1] *Z. Nehari*: The Schwarzian derivative and schlicht functions. Bull. Amer. Math. Soc. *55* (1949), 545–551.

[2] *В. В. Покорный:* О некоторых достаточных условиях однолистности. Доклады Академии Наук СССР, *79* (1951), 743—746.

[3] *Z. Nehari*: Some criteria of univalence. Proc. Amer. Math. Soc. *5* (1954), 700–704.

[4] *Z. Nehari*: Univalent functions and linear differential equations. Lectures on functions of a complex variable, Ann Arbor 1955, 49–60.

[5] *R. F. Gabriel*: The Schwarzian derivative and convex functions. Proc. Amer. Math. Soc. *6* (1955), 58–66.

[6] *V. Šeda*: O niektorých vlastnostiach riešení diferenciálnej rovnice $y'' = Q(x)\,y$, $Q(x) \not\equiv 0$ je celá funkcia. Acta F. R. N. Univ. Comen. IV-3-5, Mathem., 1959, 223–253.

[7] *В. Шеда:* Несколько теорем о линейном дифференциальном уравнении второго порядка типа Якоби в комплексной области. Časopis pro pěstování matematiky *88* (1963), 29–58.

[8] *V. Šeda*: O pojme inverznej analytickej funkcie. Mat.-fyz. časopis SAV *13* (1963), 177–192.

[9] *S. Saks, A. Zygmund*: Analytic Functions. Warszawa-Wroclaw 1952.

[10] *R. Nevanlinna*: Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris 1929.

[11] *E. Hille*: Oscillation theorems in the complex domain. Transactions Amer. Math. Soc. *23* (1922), 350–385.

[12] *E. Hille*: Zero point problems for linear differential equations of the second order. Mat. Tidskr., B 1927, 25–44.

[13] *G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya*: Inequalities, Cambridge 1934.

[14] *C. R. Nardzewski*: Une extension d'un théorème de Sturm aux fonctions analytiques. Ann. Univ. Mariae Curie Sklodovska, Lublin, Vol. *IV*, 2 (1950), 5–7.

[15] *L. Bieberbach*: Lehrbuch der Funktionentheorie, I. Band. Leipzig–Berlin 1934.

[16] *V. Doležal, J. Kurzweil*: O některých vlastnostech lineárních diferenciálních rovnic. Aplikace matematiky *4* (1959), 163–176.

Výťah

POUŽITIE HLAVNEJ VETY KONFORMNÉHO ZOBRAZENIA V TEÓRII LINEÁRNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC 2. RÁDU

V. Šeda Bratislava

V práci sa vyšetrujú vlastnosti riešení diferenciálnej rovnice

$$y'' = Q(x)\,y, \tag{1}$$

$Q(x)$ je funkcia holomorfná v jednoducho súvislej oblasti T, $\infty \notin T$. Využíva sa pritom hlavne vzťah medzi nulovými bodmi riešení diferenciálnej rovnice (1) a rozdelením hodnôt riešenia diferenciálnej rovnice

$$(2) \qquad -\{z, x\} = Q(x) .$$

$\{z, x\}$ znamená Schwarzovu deriváciu funkcie z podľa x. Pomocou hlavnej vety konformného zobrazenia je v oblasti T konformne ekvivalentnej s jednotkovým kruhom dokázaná existencia diferenciálnych rovníc (1) s úplne odlišnými vlastnosťami než majú rovnice (1) s celým koeficientom. Ďalej sa skúmajú vlastnosti rovnice (1) v niektorých špeciálnych prípadoch. Záverom je daný odhad pre modul a argument rozdielu dvoch nulových bodov funkcie yy', y je riešenie rovnice (1).

Zusammenfassung

ÜBER EINE ANWENDUNG DES HAUPTSATZES DER KONFORMEN ABBILDUNG IN DER THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 2. ORDNUNG

V. ŠEDA, Bratislava

In der Arbeit werden die Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung

$$(1) \qquad y'' = Q(x)\, y$$

untersucht, wo $Q(x)$ eine holomorphe Funktion in einem einfach zusammenhängenden Gebiet T, $\infty \notin T$, ist. Dabei wird hauptsächlich die Beziehung zwischen den Nullstellen der Lösungen der Differentialgleichung (1) und der Wertverteilung der Lösung der Differentialgleichung

$$(2) \qquad -\{z, x\} = Q(x)$$

benützt. $\{z, x\}$ bedeutet die Schwarzsche Ableitung der Funktion z nach x. Mit Hilfe des Fundamentalsatzes der konformen Abbildung wird die Existenz der Differentialgleichungen (1) mit dem Einheitskreis konform äquivalentem in dem Gebiet T bewiesen, deren Eigenschaften von den Eigenschaften der Differentialgleichungen (1), welche einen ganzen Koeffizienten haben, vollkommen verschieden sind. Weiter werden die Eigenschaften der Differentialgleichung (1) in einigen speziellen Fällen untersucht. Abschliessend ist eine Abschätzung für den Modul und das Argument der Differenz zweier Nullstellen der Funktion yy' angegeben, wo y die Lösung der Gleichung (1) darstellt.