Časopis pro pěstování matematiky

Ivan Korec

Beweis des Axioms der Konstruktivität in der Theorie endlicher Mengen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 3, 260--261

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117621

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

BEWEIS DES AXIOMS DER KONSTRUKTIVITÄT IN DER THEORIE ENDLICHER MENGEN

IVAN KOREC, Bratislava

(Eingegangen am 23. Januar 1967)

Die Arbeit [2] behandelt unter anderem den Beweis des Auswahlaxioms E (aus [1]) aus den Axiomen der Gödel-Bernaysschen Mengentheorie (siehe [1])

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{A1}-\mathrm{A4}\,, \quad \mathrm{B1}-\mathrm{B8}\,, \quad \mathrm{C2}-\mathrm{C4}\,, \quad \mathrm{D}$$

und aus den Axiomen

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{C0}\,, \quad \neg \mathrm{C1}$$

wo wir mit C0 das Axiom $(\exists X)\,(\mathrm{M}(X))$ und mit $\neg$C1 das Axiom

$$\neg(\exists a)\,(a \neq 0\,\&\,(\forall x \in a)\,(\exists y \in a)\,(x \subset y))$$

bezeichnen (siehe [2]).

In dieser Bemerkung wird bewiesen, dass man das Axiom der Konstruktivität $V = L$ (aus [1]) aus den Axiomen (1) und (2) beweisen kann. Nachdem die Klasse On, die Funktion F und die Klasse L (wie in der Arbeit [1]) ohne das Axiom C1 definiert wurde, kann man auch in der Theorie endlicher Mengen das Axiom der Konstruktivität aussprechen.

Die folgenden drei Behauptungen sind Sätze der Theorie endlicher Mengen mit den Axiomen (1), (2).

Lemma 1.

$$0 \in X\,\&\,(\forall x, y \in X)\,(\{x\} \cup y \in X) \rightarrow X = V\,.$$

Beweis. Wäre $V - X \neq 0$, so müsste z mit der Eigenschaft $z \in V - X\,\&\,z \cap (V - X) = 0$ existieren. Wir betrachten die Menge $u = \mathfrak{P}(z) \cap X$. Diese Menge hat ein maximales (bezüglich $\subseteq$) Element w. Es ist $w \subset z$ (weil $w \in X$) und dann existiert ein v, $v \in z - w$. Es gilt $v \in X$, $w \in X$ und dann auch $\{v\} \cup w \in X$. Aber $\{v\} \cup w \subseteq z$, daher $\{v\} \cup w \subseteq u$, was ein Widerspruch ist.

Lemma 2.

$$0 \in L \,\&\, (\forall x, y \in L)(\{x\} \cup y \in L) .$$

Beweis. Es ist offenbar, dass $0 \in L$. Es sei $x, y \in L$. Dann $\{x\} = \{x, x\} \in L$. Dann, nach [1], 9.66 (in dem Beweis dieser Behauptung benützt man nicht das Axiom C1) gilt auch $\{x\} \cup y \in L$.

Satz.

$$V = L .$$

Beweis. Der Satz ist eine unmittelbare Folgerung der angeführten Lemmata.

Literatur

[1] *Kurt Gödel:* The Consistency of the Axiom of Choice ... Princeton Univ. Press, 1940. Annals of Math. Studies, No 3.

[2] *Petr Vopěnka:* Axiome der Theorie endlicher Mengen. Čas. pro pěst. matematiky, *89* (1964), 312—317.

Anschrift des Verfassers: Bratislava, Šmeralova 2b (Katedra algebry PFUK).