Reiner Kühnau

Eine Bemerkung zu zwei Arbeiten von Herrn O. Dvořák

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 3, 268--269

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117725

EINE BEMERKUNG ZU ZWEI ARBEITEN VON HERRN O. DVOŘÁK

REINER KÜHNAU, Halle/Saale

(Eingelangt am 22. August 1969)

Schon 1933 zeigte Herr O. DVOŘÁK [1] die Richtigkeit der Bieberbachschen Vermutung bei denjenigen Funktionen $f(z)$ der Klasse S, für die in $|z| < 1$ stets

$$\mathfrak{Re}\sqrt{(f(z)/z)} > \tfrac{1}{2} \tag{1}$$

gilt. Dabei bewies er noch, daß für den Radius r^* der größten offenen und zu $z = 0$ konzentrischen Kreisscheibe, in der (1) für jede Abbildung aus S richtig ist, $r^* > 0{,}83$ gilt. Nun wird in [2] versucht, diese Abschätzung zu $r^* > 0{,}90$ bzw. $r^* > 0{,}97$ zu verbessern. Letztere Abschätzungen sind jedoch leider unrichtig. Das ergibt sich unmittelbar aus dem von H. GRUNSKY [5] und H. GRÖTZSCH [4] (vgl. auch die Darstellung in [6], Theorem 6.18, [3] Ungleichung (19) auf Seite 113) angegebenen genauen Wertebereich von $\log[f(z)/z]$ bei den Abbildungen von S, und dieser genaue Wertebereich liefert auch sofort den genauen Wert von r^* zu

$$r^* = \mathfrak{Tg}\,(\beta/\sin\beta) = 0{,}835\ldots, \tag{2}$$

wobei β die zwischen 0 und $\pi/2$ gelegene Lösung von

$$\exp(\beta/\operatorname{tg}\beta) = 2\cos\beta\,\mathfrak{Cof}\,(\beta/\sin\beta) \tag{3}$$

ist. Nach [5], [4], [6], [3] wird nämlich genau für $r = r^*$ der durch die Parameterdarstellung

$$W_1(\beta) = -\log(1 - r^2) - e^{i\beta}\log[(1 + r)/(1 - r)]$$

definierte Rand des Wertebereichs für $\log[f(z)/z]$ bei einem festen z mit $|z| = r$ von der Kurve $W_2(t) = 2\log(\frac{1}{2} + it)$ (entsprechend der für die Ebene von $\log[f(z)/z]$ umgeschriebenen Bedingung $\mathfrak{Re}\sqrt{(f(z)/z)} = \frac{1}{2}$) berührt, und diese Berührungsbedingung liefert nach elementaren Umformungen (2) und (3). Ganz entsprechende Überlegungen führen bei den noch in [2] betrachteten ungeraden Funktionen aus S zum Ziel.

Zusatz bei der Korr.: Bedingt durch aus dem Verlust mehrerer Postsendungen entstandener Mißverständnisse ist diese Arbeit gleichzeitig in den „Math. Nachrichten" *48* (1971), 225—226 erschienen.

Literatur

[1] *O. Dvořák:* Sur les fonctions univalentes. Čas. Mat. fys. *63,* 9—16 (1933) [Tschechisch].

[2] *O. Dvořák:* Über schlichte Funktionen, I und II. Čas. pěst. mat. *92* (1967), 162—192 und *94* (1969), 146—167.

[3] *G. M. Golusin:* Geometrische Funktionentheorie. Berlin 1957 (Übersetzung aus dem Russ.).

[4] *H. Grötzsch:* Über zwei Verschiebungsprobleme der konformen Abbildung. Sitzungsber. Preuss. Ak. Wiss., phys.—math. Kl. 1933, 87—100.

[5] *H. Grunsky:* Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche. Schr. Math. Sem. u. Inst. f. angew. Math. Univ. Berlin *1,* 93—140 (1932).

[6] *J. A. Jenkins:* Univalent functions and conformal mapping. Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgeb., Neue Folge, Heft 18, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1958.

Anschrift des Verfassers: Martin-Luther-Universität, Sektor Mathematik, Halle/Saale Universitätsplatz 8/9, DDR.