

Libuše Grygarová

O jednom důkazu principu duality v lineárním programování

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 110 (1985), No. 4, 378--383

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/118254>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1985

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O JEDNOM DŮKAZU PRINCIPU DUALITY  
V LINEÁRNÍM PROGRAMOVÁNÍ

LIBUŠE GRYGAROVÁ, Praha  
(Došlo dne 16. února 1984)

Princip duality v lineárním programování je v literatuře dokazován různými způsoby. Pojem duální úlohy k úloze lineárního programování byl zaveden J. von Neumannem v r. 1947. Princip duality formulovali a dokázali D. Gale, H. W. Kuhn a A. W. Tucker v r. 1951 [3] pomocí Farkasova lemmatu, na jehož základě byly s různými obměnami podávány další důkazy uvedeného principu (např. [9], [6]). Další skupina důkazů se opírá o věty simplexové metody (např. [2], [1], [8]). Řada autorů vychází z Kuhn-Tuckerových podmínek z teorie konvexního programování a vět o oddělitelnosti konvexních množin (např. [4], [7]). Geometrické důkazy principu duality jsou uvedeny např. v [10], [5], [12].

V předloženém článku je podán stručný důkaz principu duality v lineárním programování založený na zcela elementárních poznacích z konvexní analýzy (vlastnosti konvexních kuželů, viz např. [11]). Současně s důkazem principu duality se zde ukazuje, jak lze na základě znalosti optimálního řešení jedné z duálních úloh popsat množinu všech optimálních řešení druhé úlohy.

§ 1

**Definice 1.** Je-li  $K \subset E_n$  konvexní kužel s vrcholem  $\mathbf{x}^0$ , potom kužel

$${}^pK(\mathbf{x}^0) := \{\mathbf{x} \in E_n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0, \mathbf{y} - \mathbf{x}^0) \leq 0, \mathbf{y} \in K\}$$

nazýváme *polárním kuželem* ke kuželi  $K$  v jeho vrcholu  $\mathbf{x}^0$ .

Platí: 1)  ${}^p({}^pK(\mathbf{x}^0)) = \bar{K}$  (věta o bipolaritě);

2) Je-li  $R := \{\mathbf{x} \in E_n \mid (\mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = 0, \mathbf{c} \neq \mathbf{0}\}$  daná nadrovina v  $E_n$  a  $H^+ := \{\mathbf{x} \in E_n \mid (\mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) > 0\}$ ,  $H^- := \{\mathbf{x} \in E_n \mid (\mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) < 0\}$  jí příslušné poloprostory, potom platí

$$K \subset \bar{H}^- \Leftrightarrow \mathbf{x}^0 + \mathbf{c} \in {}^pK(\mathbf{x}^0),$$

$$K \subset \bar{H}^+ \Leftrightarrow \mathbf{x}^0 - \mathbf{c} \in {}^pK(\mathbf{x}^0) \quad (\text{Farkasova věta}).$$

**Definice 2.** Je-li  $\mathbf{M} \subset \mathbf{E}_n$ ,  $\mathbf{M} \neq \emptyset$ ,  $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{E}_n$  libovolný bod, potom kužel

$$\mathbf{P}_M(\mathbf{x}^0) := \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0), \mathbf{y} \in \mathbf{M}, t \geq 0 \}$$

nazýváme projekčním kuželem množiny  $\mathbf{M}$  z bodu  $\mathbf{x}^0$ .

Platí: Je-li  $\mathbf{M}$  konvexní množina, potom  $\mathbf{P}_M(\mathbf{x}^0)$  je rovněž konvexní množinou v  $\mathbf{E}_n$ .

§ 2

**Definice 3.** Je-li  $\mathbf{M} \subset \mathbf{E}_n$ ,  $\mathbf{M} \neq \emptyset$  konvexní množina,  $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{M}$  libovolný bod, potom množinu  $\mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0) := \bar{\mathbf{P}}_M(\mathbf{x}^0)$  nazýváme styčným kuželem množiny  $\mathbf{M}$  v jejím bodě  $\mathbf{x}^0$ .

Platí: Je-li  $\mathbf{M}$  konvexní polyedr v  $\mathbf{E}_n$ , potom  $\bar{\mathbf{P}}_M(\mathbf{x}^0) = \mathbf{P}_M(\mathbf{x}^0) = \mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0)$  pro každý bod  $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{M}$ .

**Lemma 1.** Necht'  $\mathbf{M}$  je konvexní polyedr s popisem

$$(1) \quad \mathbf{M} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}) \leq b_r \ (r = 1, \dots, m) \},$$

$\mathbf{x}^0 \in \mathbf{M}$  libovolný bod a

$$(2) \quad \mathbf{I} = \{ r \in \{1, \dots, m\} \mid (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}^0) = b_r \},$$

potom

$$(3) \quad \mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}) \leq b_r \ (r \in \mathbf{I}) \},$$

$$(4) \quad {}^p\mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \sum_{r \in \mathbf{I}} \mathbf{a}_r u_r, u_r \geq 0 \ (r \in \mathbf{I}) \}.$$

Důkaz. Pro libovolný bod  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0)$  existuje podle definic 2 a 3 bod  $\mathbf{y}^* \in \mathbf{M}$  a  $t^* \geq 0$  tak, že  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^0 + t^*(\mathbf{y}^* - \mathbf{x}^0)$ . Potom podle (1) a (2) je

$$(\mathbf{a}_r, \mathbf{x}^*) = (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}^0) + t^*((\mathbf{a}_r, \mathbf{y}^*) - (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}^0)) \leq b_r \ (r \in \mathbf{I}),$$

tedy  $\mathbf{x}^* \in \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}) \leq b_r \ (r \in \mathbf{I}) \}$ .

Uvažujme nyní libovolný bod  $\mathbf{x}^* \in \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}) \leq b_r \ (r \in \mathbf{I}) \}$ . Je-li  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^0$ , potom  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0)$ . Je-li  $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}^0$ ,  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{M}$ , potom  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^0 + (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0)$  a tedy opět  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0)$ . Je-li  $\mathbf{x}^* \notin \mathbf{M}$ , potom pro dostatečně malé  $t^* > 0$  platí  $\mathbf{y} := \mathbf{x}^0 + t^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0) \in \mathbf{M}$ , odkud plyne  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^0 + 1/t^*(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) \in \mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0)$ . Tím je vztah (3) dokázán.

Označme

$$\mathbf{K}^* := \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \sum_{r \in \mathbf{I}} \mathbf{a}_r u_r, u_r \geq 0 \ (r \in \mathbf{I}) \}.$$

Snadno se ověří, že  $\mathbf{K}^*$  je konvexní kužel s vrcholem  $\mathbf{x}^0$  s vlastností  $\mathbf{K}^* = \bar{\mathbf{K}}^*$ . Podle definice 1, relací (2) a (3) platí

$$\begin{aligned} {}^p\mathbf{K}^*(\mathbf{x}^0) &= \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \sum_{r \in \mathbf{I}} u_r (\mathbf{a}_r, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \leq 0, u_r \geq 0 \ (r \in \mathbf{I}) \} = \\ &= \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{a}_r, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \leq 0 \ (r \in \mathbf{I}) \} = \mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0). \end{aligned}$$

Podle věty o bipolaritě je  $P(PK^*(\mathbf{x}^0)) = PK_M(\mathbf{x}^0) = K^*$  a vztah (4) je dokázán.

Poznámka 1. Je-li  $M$  konvexní polyedr s popisem

$$(5) \quad M = \{\mathbf{x} \in E_n \mid (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}) \leq b_r \ (r = 1, \dots, m), x_\alpha \geq 0 \ (\alpha = 1, \dots, n)\},$$

$\mathbf{x}^0 \in M$  libovolný bod a

$$(6) \quad I_1 = \{r \in \{1, \dots, m\} \mid (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}^0) = b_r\}, \quad I_2 = \{\alpha \in \{1, \dots, n\} \mid x_\alpha^0 = 0\},$$

potom z lemmatu 1 plyne, že

$$(7) \quad K_M(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x} \in E_n \mid (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}) \leq b_r \ (r \in I_1), x_\alpha \geq 0 \ (\alpha \in I_2)\},$$

$$(8) \quad PK_M(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x} \in E_n \mid x_\alpha = x_\alpha^0 + \sum_{r \in I_1} a_{r\alpha} u_r - v_\alpha \ (\alpha \in I_2),$$

$$x_\alpha = x_\alpha^0 + \sum_{r \in I_1} a_{r\alpha} u_r \ (\alpha \in \{1, \dots, n\} \setminus I_2), u_r \geq 0 \ (r \in I_1),$$

$$v_\alpha \geq 0 \ (\alpha \in I_2)\}.$$

**Lemma 2.** *Nechť  $M \subset E_n$  je libovolný konvexní polyedr a  $\mathbf{c} \in E_n$ ,  $\mathbf{c} \neq \mathbf{o}$  libovolný bod. Bod  $\mathbf{x}^0 \in M$  je optimálním řešením úlohy lineárního programování*

$$(9) \quad \max \{(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in M\}!$$

*právě tehdy, je-li optimálním řešením úlohy*

$$(10) \quad \max \{(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in K_M(\mathbf{x}^0)\}!.$$

Důkaz. Podle definic 2 a 3 je  $M \subset K_M(\mathbf{x}^0)$ , odkud plyne, že je-li  $\mathbf{x}^0 \in M$  optimálním řešením úlohy (10), je též optimálním řešením úlohy (9). Naopak, je-li  $\mathbf{x}^0$  optimálním řešením úlohy (9), platí  $(\mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \leq 0$  pro všechna  $\mathbf{x} \in M$ . Podle definic 2 a 3 je  $\mathbf{x}^0 \in K_M(\mathbf{x}^0)$  a zvolíme-li  $\mathbf{x}^* \in K_M(\mathbf{x}^0)$ ,  $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}^0$  libovolně, potom existuje  $\mathbf{y}^* \in M$ ,  $t^* > 0$  tak, že  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^0 + t^*(\mathbf{y}^* - \mathbf{x}^0)$ . Odtud plyne  $\mathbf{y}^* = \mathbf{x}^0 + 1/t^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0)$ , a protože  $\mathbf{y}^* \in M$ , platí

$$(\mathbf{c}, \mathbf{y}^* - \mathbf{x}^0) = (\mathbf{c}, 1/t^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0)) = 1/t^*(\mathbf{c}, \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0) \leq 0 \Rightarrow (\mathbf{c}, \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0) \leq 0.$$

Vzhledem k libovolnosti bodu  $\mathbf{x}^* \in K_M(\mathbf{x}^0)$  dostáváme odtud, že bod  $\mathbf{x}^0$  je optimálním řešením úlohy (10).

### § 3

Uvažujme úlohu lineárního programování

$$(11) \quad \max \{(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in M\}!, \quad (\mathbf{c} \neq \mathbf{o}),$$

kde  $M$  má význam z (5).

**Věta 1.** *Nechť  $\mathbf{x}^0$  je optimální řešení úlohy (11). Potom existují čísla  $u_r^0 \geq 0$  ( $r = 1, \dots, m$ ) tak, že platí*

$$(12) \quad c_\alpha \leq \sum_{r=1}^m a_{rx} u_r^0 \quad (\alpha \in I_2), \quad c_\alpha = \sum_{r=1}^m a_{rx} u_r^0 \quad (\alpha \in \{1, \dots, n\} \setminus I_2),$$

kde  $I_2$  má význam z (6).

Důkaz. Je-li  $\mathbf{x}^0$  optimální řešení úlohy (11), pak je podle lemmatu 2 též optimálním řešením úlohy (10) a tedy platí

$$(\mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \leq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0).$$

Označíme-li

$$\mathbf{H}^- := \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \leq 0\},$$

potom můžeme psát  $\mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0) \subset \mathbf{H}^-$ . Podle Farkasovy věty (§ 1) platí pak  $\mathbf{x}^0 + \mathbf{c} \in \in {}^p \mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0)$ . Vzhledem k poznámce 1, vztahu (8), existují proto čísla  $u_r^0 \geq 0$  ( $r \in I_1$ )<sup>1)</sup>,  $v_\alpha^0 \geq 0$  ( $\alpha \in I_2$ ) tak, že

$$c_\alpha = \sum_{r \in I_1} a_{rx} u_r^0 - v_\alpha^0 \quad (\alpha \in I_2), \quad c_\alpha = \sum_{r \in I_1} a_{rx} u_r^0 \quad (\alpha \in \{1, \dots, n\} \setminus I_2).$$

Definujeme-li ještě  $u_r^0 = 0$  ( $r \in \{1, \dots, m\} \setminus I_1$ ), pak odtud plyne již (12).

Poznámka 2. Bod  $\mathbf{u}^0 \in \mathbf{E}_m$  z věty 1 je zřejmě bodem množiny

$$(13) \quad \mathbf{N} := \{\mathbf{u} \in \mathbf{E}_m \mid (\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{u}) \geq c_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, n), \quad u_r \geq 0 \quad (r = 1, \dots, m)\},$$

takže za předpokladu věty 1 je  $\mathbf{N} \neq \emptyset$ . Pro každý bod  $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$  z (5) a  $\mathbf{u} \in \mathbf{N}$  z (13) platí pak zřejmě

$$(14) \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \leq \sum_{r=1}^m \sum_{\alpha=1}^n a_{rx} x_\alpha u_r \leq (\mathbf{b}, \mathbf{u}).$$

**Věta 2.** Je-li úloha (11) řešitelná, pak je řešitelná též úloha lineárního programování

$$(15) \quad \min \{(\mathbf{b}, \mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \mathbf{N}\},$$

kde  $\mathbf{N}$  má význam z (13), přičemž pro každé optimální řešení  $\mathbf{x}^0$  úlohy (11) a každé optimální řešení  $\mathbf{u}^0$  úlohy (15) platí  $(\mathbf{c}, \mathbf{x}^0) = (\mathbf{b}, \mathbf{u}^0)$ .

Důkaz. Nechť  $\mathbf{x}^0$  je optimální řešení úlohy (11), potom podle věty 1 a jejího důkazu existují čísla  $u_r^0 \geq 0$  ( $r \in I_1$ ),  $u_r^0 = 0$  ( $r \in \{1, \dots, m\} \setminus I_1$ ), která vyhovují vztahům (12), přičemž  $I_1$  a  $I_2$  mají význam z (6). Podle (12) je dále

$$(16) \quad \begin{aligned} (\mathbf{c}, \mathbf{x}^0) &= \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha x_\alpha^0 = \sum_{\alpha \notin I_2} c_\alpha x_\alpha^0 = \sum_{\alpha \notin I_2} \sum_{r=1}^m a_{rx} u_r^0 x_\alpha^0 = \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{r \in I_1} a_{rx} u_r^0 x_\alpha^0 = \sum_{r \in I_1} b_r u_r^0 = \sum_{r=1}^m b_r u_r^0 = (\mathbf{b}, \mathbf{u}^0). \end{aligned}$$

Podle poznámky 2 odtud plyne, že  $(\mathbf{b}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{b}, \mathbf{u}^0)$  pro  $\mathbf{u} \in \mathbf{N}$  a tedy  $\mathbf{u}^0$  je optimálním řešením úlohy (15).

<sup>1)</sup>  $I_1$  má význam z (6).

Pro libovolné optimální řešení  $\mathbf{x}^*$  úlohy (11) a libovolné optimální řešení  $\mathbf{u}^*$  úlohy (15) platí pak (vzhledem k (16))

$$(\mathbf{c}, \mathbf{x}^*) = (\mathbf{c}, \mathbf{x}^0) = (\mathbf{b}, \mathbf{u}^0) = (\mathbf{b}, \mathbf{u}^*),$$

čímž je věta dokázána.

**Definice 4.** Úlohu lineárního programování (15) nazýváme *duální úlohou k primární úloze* (11).

Důsledek 1. Je-li  $\mathbf{x}^0$  optimálním řešením úlohy (11) a  $I_1, I_2$  mají význam z (6), potom každý bod  $\mathbf{u}^* \in \mathbf{N}$ , pro který platí

$$(17) \quad u_r^* = 0 \quad (r \in \{1, \dots, m\} \setminus I_1), \quad \sum_{r \in I_1} a_{r\alpha} u_r^* = c_\alpha \quad (\alpha \in \{1, \dots, n\} \setminus I_2)$$

je optimálním řešením úlohy (15).

**Věta 3.** Je-li  $\mathbf{x}^0$  optimálním řešením úlohy (11) a  $I_1, I_2$  mají význam z (6), potom pro množinu  $\mathbf{N}_{\text{opt}}$  všech optimálních řešení úlohy (15) platí

$$\mathbf{N}_{\text{opt}} = \{ \mathbf{u}^* \in \mathbf{N} \mid u_r^* = 0 \ (r \in \{1, \dots, m\} \setminus I_1), \ \sum_{r \in I_1} a_{r\alpha} u_r^* = c_\alpha \ (\alpha \in \{1, \dots, n\} \setminus I_2) \}.$$

Důkaz. Je-li  $\mathbf{u}^* \in \mathbf{N}$  libovolným optimálním řešením úlohy (15), potom podle věty 2 a poznámky 2 platí

$$(18) \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}^0) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{r=1}^m a_{r\alpha} x_\alpha^0 u_r^* = (\mathbf{b}, \mathbf{u}^*).$$

Kdyby alespoň pro jedno  $r \in \{1, \dots, m\} \setminus I_1$  bylo  $u_r^* > 0$ , potom by vzhledem k (6) platilo

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{r=1}^m x_\alpha^0 a_{r\alpha} u_r^* = \sum_{r \in I_1} u_r^* \sum_{\alpha=1}^n a_{r\alpha} x_\alpha^0 + \sum_{r \notin I_1} u_r^* \sum_{\alpha=1}^n a_{r\alpha} x_\alpha^0 < (\mathbf{b}, \mathbf{u}^*),$$

což je spor s (18).

Kdyby alespoň pro jedno  $\alpha \in \{1, \dots, n\} \setminus I_2$  platilo  $\sum_{r \in I_1} a_{r\alpha} u_r^* > c_\alpha$ , potom vzhledem k (6) bychom dostali

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{r=1}^m a_{r\alpha} x_\alpha^0 u_r^* = \sum_{\alpha \notin I_2} \left( \sum_{r=1}^m a_{r\alpha} u_r^* \right) x_\alpha^0 = \sum_{\alpha \notin I_2} \sum_{r \in I_1} a_{r\alpha} u_r^* x_\alpha^0 > (\mathbf{c}, \mathbf{x}^0),$$

což je opět spor s (18). Bod  $\mathbf{u}^*$  splňuje tedy vztahy (17). Odtud a z důsledku 1 věty 2 plyne již tvrzení.

**Poznámka 3.** Zcela analogickým způsobem se dá dokázat, že je-li  $\mathbf{u}^0$  optimálním řešením úlohy (15), přičemž

$$J_1 = \{ \alpha \in \{1, \dots, n\} \mid (\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{u}^0) = c_\alpha \}, \quad J_2 = \{ r \in \{1, \dots, m\} \mid u_r^0 = 0 \},$$

potom pro množinu  $\mathbf{M}_{\text{opt}}$  všech optimálních řešení úlohy (11) platí

$$\mathbf{M}_{\text{opt}} = \{ \mathbf{x}^* \in \mathbf{M} \mid x_\alpha^* = 0 \ (\alpha \in \{1, \dots, n\} \setminus J_1), \ \sum_{\alpha \in J_1} a_{r\alpha} x_\alpha^* = b_r \ (r \in \{1, \dots, m\} \setminus J_2) \}.$$

**Věta 4.** (*princip duality*). Úlohy (11) a (15) jsou řešitelné právě tehdy, jestliže současně  $\mathbf{M} \neq \emptyset$ ,  $\mathbf{N} \neq \emptyset$ . Pro libovolné optimální řešení  $\mathbf{x}^0$  úlohy (11) a libovolné optimální řešení  $\mathbf{u}^0$  úlohy (15) platí  $(\mathbf{c}, \mathbf{x}^0) = (\mathbf{b}, \mathbf{u}^0)$ .

Důkaz. Nechť  $\mathbf{M} \neq \emptyset$ ,  $\mathbf{N} \neq \emptyset$ . Podle poznámky 2 je lineární funkce  $(\mathbf{c}, \mathbf{x})$  na množině  $\mathbf{M}$  shora omezená a tedy úloha (11) je řešitelná. Analogicky je cílová funkce  $(\mathbf{b}, \mathbf{u})$  na množině  $\mathbf{N}$  zdola omezená a tedy úloha (15) je řešitelná.

Jsou-li úlohy (11) a (15) řešitelné, potom nutně  $\mathbf{M} \neq \emptyset$ ,  $\mathbf{N} \neq \emptyset$ . Zbývající část tvrzení plyne z věty 2.

#### Literatura

- [1] L. Collatz, W. Wetterling: Optimierungsaufgaben. Springer-Verlag Berlin 1971.
- [2] G. B. Dantzig: Lineare Programmierung und Erweiterungen. Springer-Verlag Berlin 1966.
- [3] D. Gale, H. W. Kuhn, A. W. Tucker: Linear programming and the theory of games. In T. C. Koopmans (Ed.): Activity analysis of production and allocation. New York 1951.
- [4] J. Havrda: Matematické programování. SNTL Praha 1972.
- [5] D. B. Judin, E. G. Golstein: Lineare Optimierung 1. Berlin 1968.
- [6] A. Laščiak a kol.: Optimálne programovanie. Alfa Bratislava 1983.
- [7] D. G. Luenberger: Introduction to linear and nonlinear programming. Addison-Wesley Publishing Company 1973.
- [8] M. Maňas: Optimalizační metody. SNTL Praha 1979.
- [9] F. Nožička, J. Guddat, H. Hollatz: Theorie der linearen Optimierung. Akademie-Verlag Berlin 1972.
- [10] F. Nožička: Ein geometrischer Beweis des Dualitätsprinzips in der linearen Optimierung. Math. Operationsforsch. u. Statist. 2 (1971) 1.
- [11] F. Nožička, L. Grygarová, K. Lommatzsch: Geometrie konvexer Mengen und konvexe Analysis. Akademie-Verlag Berlin 1985 (kniha je v tisku).
- [12] G. Š. Rubinštejn: dodatek v knize: Линейные неравенства и смежные вопросы. Издательство иностранной литературы. Москва 1959.

Author's address: 118 00 Praha 1, Malostranské n. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).