Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Logarithmus faktorielly

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 2, 129--132

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120879

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Logarithmus faktorielly.

Píše M. Lerch,
docent při české vysoké šk. technické v Praze.

V rovině mějme soustavu pravoúhlých souřadnic X, Y a v ní definujme křivku K rovnicí*)

$$y = \log x.$$

Na pořadnicích příslušných k úsečkám

$$x = 10,\ 11,\ 12, \ldots n$$

leží body s celistvými pořadnicemi y; chceme stanoviti počet všech těchto bodů majících celistvé a kladné souřadnice, pokud leží mezi osou X, čarou K a pořadnicí MP bodu M (n, log n); některé z nich padnou na čáru K, jiné na pořadnici MP, ale žádný na osu X, poněvadž tam y jest nullou, tedy nikoliv kladným číslem.

K úsečce $x = k$ patřící pořadnice obsahuje z těchto bodů ony, jichž pořadnice jsou $y = 1, 2, \ldots [\log k]$, znamená-li nám $[\log k]$ celky (charakteristiku) obyčejného logarithmu čísla k. Počet jich jest $[\log k]$, a tedy je počet všech bodů uvažované soustavy dán součtem

$$S = [\log 10] + [\log 11] + \ldots + [\log n].$$

Tyto body ale obdržíme ještě jiným způsobem, když totiž z obdélníka OPMQ, jehož vrcholy jsou (0, 0), (n, 0), (n, log n), a (0, log n), vyloučíme body položené mezi osou Y, čarou K a přímkou MQ. Body ty se rozkládají po jednotlivých rovnoběž-

*) Při tom netřeba zvláště podotýkati, že log značí tu obyčejný logarithmus briggický.

kách s osou X, vedených body $y = 1, 2, \ldots [\log n]$. Na přímce $y = h$ leží body

$$x = 1, 2, \ldots . 10^h,$$

poněvadž rovnici čáry K lze též psáti $x = 10^y$; bodů těch je 10^h a tedy v celém obrazci jich jest obsaženo

$$S_1 = 10^1 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{[\log n]}$$

čili po provedeném sčítání

$$S_1 = \frac{10}{9}(10^{[\log n]} - 1).$$

V obdélníku OPMQ ležící body s celistvými a kladnými souřadnicemi jsou v počtu

$$n[\log n],$$

a tedy jest

$$n[\log n] - S_1$$

bodů ležících v obrazci tomto „pod čarou“ K. Připočteme-li k nim ještě body (naší soustavy) ležící na čáře K, obdržíme hledaný počet S. Body ty ale mají úsečky

$$x = 10,\ 10^2, \ldots 10^{[\log n]}$$

a jich počet obnáší $[\log n]$. Máme tedy vzorec

$$S = (n + 1)[\log n] - S_1$$

čili

(1)
$$\begin{aligned}[\log 10] + [\log 11] + [\log 12] + \ldots + [\log n] \\ = (n + 1)[\log n] - \frac{10}{9}(10^{[\log n]} - 1).\end{aligned}$$

Avšak

$$[\log k] = \log k - \mu_k,$$

kde μ_k značí mantissu logarithmu k, tedy ryzí kladný zlomek; levou stranu rovnice (1) lze tedy psáti

$$\begin{aligned}\log 10 + \log 11 + \log 12 + \ldots + \log n - (\mu_{10} + \mu_{11} + \ldots + \mu_n) \\ = \log(n!) - \log(9!) - (\mu_{10} + \mu_{11} + \ldots + \mu_n).\end{aligned}$$

Součet

$$\mu_{10} + \mu_{11} + \ldots + \mu_n$$

jest mezi 0 a n, i lze jej znamenati $\bar{\omega} . n$, kde $\bar{\omega}$ značí kladnou veličinu, která jest menší jedné. Máme pak vzorec

$$\text{(2)} \qquad \log(n!) = (n+1)[\log n] - \frac{1}{9} . 10^{[\log n]} + + \log 9! + \frac{10}{9} + \bar{\omega} . n,$$

kde $0 < \bar{\omega} < 1$ značí blíže neznámou jinak veličinu.

Odtud na př. soudíme, že

$$\log(100!) = 202 - \frac{1000}{9} + \log 9! + \frac{10}{9} + 100 . \bar{\omega};$$

můžeme tedy pomocí tohoto vzorce určiti logarithmus čísla 100! s chybou nedosahující čísla 100, která jest tedy poměrně značnou; chyba stává se poměrně nepatrnou teprvé pro tak veliká n, že i jich logarithmus je veliký. Na příklad pro $n = 10^{50}$ je prvý člen

$$n \log n = 50 . 10^{50}$$

a proti tomuto všecky ostatní členy jsou poměrně malé. Výsledek náš lze vyjádřiti v ten způsob, že podíl

$$\frac{\log(n!)}{n \log n}$$

tím je bližší jednotce, čím n jest větší.

Pravou stranu rovnice (2) můžeme skutečně psáti

$$n \log n - n\mu_n + [\log n] - \frac{10^{1-\mu_n}}{9} . n + \log 9! + \frac{10}{9} + \bar{\omega} . n$$

a tedy budou ve výrazu

$$\frac{\log(n!)}{n \log n} = 1 + \frac{\bar{\omega} - \frac{10^{1-\mu_n}}{9} - \mu_n}{\log n} + \frac{[\log n]}{n \log n} + \frac{\log 9! + \frac{10}{9}}{n \log n}$$

všichni členové pravé strany až na první blízky nulle, je-li n velmi veliké. Máme tedy

$$\text{(3)} \qquad \frac{\log(n!)}{n \log n} = 1 + \delta_n,$$

kde δ_n jest veličina pro veliká n velmi malá, a sice tak, že součin $\delta_n \cdot \log n$ zůstává konečným.

O některých úlohách z arithmografie.

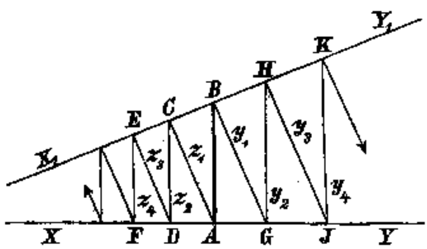
Pojednává

Vavř. Jelínek,

prof. v Novém Městě u Vídně.

(Dokončení.)

II. K důležitým úlohám grafického počítání náleží též znázorňování mocnin a odmocnin. I tu chceme upozorniti na některé výhodné obraty.



Obr. 3.

1. Mocniny $(z_1)^{\pm m}$ zlomku z_1 jednotky dané úsečkou sestrojíme, znamená-li m číslo celistvé, dle obr. 3., kde jest

$$AB = 1, \quad XY \perp AB, \quad z_1 = AC, \quad X_1Y_1 \perp AC, \text{ pak}$$
$$z_2 = CD \perp XY, \; z_3 = DE \perp X_1Y_1, \; z_4 = EF \perp XY, \text{ a t. d.},$$
$$y_1 = BG \perp X_1Y_1, \; y_2 = GH \perp XY, \; y_3 = HI \perp X_1Y_1, \text{ a t. d.}$$

Najdemeť z podobných trojúhelníků úměry:

$$z_2 : z_1 = z_1 : 1, \text{ tedy } z_2 = (z_1)^2;$$
$$z_3 : z_2 = z_2 : z_1, \text{ tedy } z_3 = \frac{z_2^2}{z_1} = (z_1)^3;$$
$$z_4 : z_3 = z_3 : z_2, \text{ tedy } z_4 = \frac{z_3^2}{z_2} = (z_1)^4. \quad \text{a t. d.}$$