

Zdeněk Horák

Odvození fyzikálních zákonů z principů energetických

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 55 (1926), No. 1, 42--60

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121072>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1926

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Odvození fyzikálních zákonů z principů energetických.

Napsal Dr. Zdeněk Horák.

§ 1. Ve svém pojednání „*Princip energie a rovnice fyziky*“¹⁾ jsem ukázal, jak lze z principu energie pomocí jistého axiomu („silového“, l. c., p. 17. (II), p. 30., 31., 33.) odvoditi diferenciální rovnice řídící průběh dějů v obecném dynamickém systému za působení silového. Dynamickým systémem rozumím (l. c., p. 22.) fyzikální systém, jehož energie (vlastní) skládá se aditivně ze dvou částí: první z nich (potenciální) U je pouze funkcí parametrů určujících konfiguraci systému, druhá pak (aktuální) T jest kvadratickou funkcí derivací parametrů dle času s koeficienty závislými na parametrech a čase. (U skleronomních systémů jest tato funkce homogenní a neobsahuje času.) Silovým působením nazývám (l. c., § 2.) takové vnější působení, jež při libovolné infinitesimální změně konfigurace dodá systému energii, kterou lze vyjádřiti jako lineární formu přírůstků parametrů. Koeficienty této formy jsou složky působící síly.

V této práci nezabýval jsem se jednotlivými případy různých oborů fyziky. Chci proto nyní naznačiti, jak můžeme důslednou aplikací obecně odvozených výsledků dospěti k fundamentálním zákonům, které platí pro typické systémy nejdůležitějších skupin fyzikálních zjevů. Vskutku systémy, s nimiž se setkáváme, splňují podmínky, jimiž jsou definovány systémy dynamické, a také vnější působení má vlastnosti silového.

V citovaném pojednání (§ 9.) došel jsem k rovnicím, které pro holonomní systém skleronomní jsou totožné se známými *zobecněnými rovnicemi Lagrangeovými* či *Lagrange-Eulerovými*, pro anholonomní systém pak mají tvar:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \pi_\rho} - \frac{\partial T}{\partial \pi_\rho} + \sum_{r=1}^n \sum_{\pi=1}^{\nu} \frac{\partial T}{\partial p_r} \left(\frac{\partial \beta_\pi^r}{\partial \pi_\rho} - \frac{\partial \beta_\rho^r}{\partial \pi_\pi} \right) \dot{\pi}_\pi + \frac{\partial U}{\partial \pi_\rho} = \Pi_\rho,$$

$\rho = 1, 2, \dots, \nu.$

Při tom π_ρ jsou nezávislé anholonomní parametry v počtu ν (stupeň volnosti), s jichž diferenciály souvisí diferenciály n ($> \nu$) holonomních parametrů p_r rovnicemi

¹⁾ Spisy vyd. přírod. fakultou Karlovy university. č. 25. (1924); v dalších odkazech označeno: l. c.

$$dp_r = \sum_{\varrho=1}^{\nu} \beta_{\varrho}^r d\pi_{\varrho}, \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

a Π_{ϱ} značí složky (vnější) síly. Kdyby podmínky platné mezi parametry p_r byly rheonomní, bylo by obecněji

$$dp_r = \sum_{\varrho=1}^{\nu} \beta_{\varrho}^r d\pi_{\varrho} + \beta^r dt.$$

Užijeme-li pak známého obratu (zavedeme další parametr za t , viz l. c., p. 21.), obdržíme z (1)

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_{\varrho}} - \frac{\partial T}{\partial \pi_{\varrho}} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial T}{\partial p_r} \left(\frac{\partial \beta^r}{\partial \pi_{\varrho}} - \frac{\partial \beta_{\varrho}^r}{\partial t} \right) + \\ + \sum_{r=1}^n \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_r} \left(\frac{\partial \beta_{\kappa}^r}{\partial \pi_{\varrho}} - \frac{\partial \beta_{\varrho}^r}{\partial \pi_{\kappa}} \right) \dot{\pi}_{\kappa} + \frac{\partial U}{\partial \pi_{\varrho}} = \Pi_{\varrho}.$$

Tyto rovnice řeší tedy nejobecnější případ dynamického systému anholonomního a rheonomního a redukují se pro děje velmi pomalé, kdy můžeme zanedbat kinetickou energii, na vztahy (l. c., § 9.)

$$(3) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_{\varrho}} = \Pi_{\varrho},$$

kteří vyjadřují *podmínky rovnováhy*.

Mimo uvedené rovnice užiji v dalším některých důsledků předpokladu, že prostor i čas je homogenní, který jsem formuloval takto (l. c., p. 8., (1)): *zákony přírodní jsou nezávislé na absolutní poloze v prostoru a na absolutním čase*. Budu je označovati jako *axiom (I)*.

Aplikovati obecné rovnice na konkrétní případy je možno teprve tehdy, známe-li závislost vlastní energie systémů na jejich stavu. Předpokládal jsem, že tuto závislost lze určit experimentálně na základě oné vlastnosti energie, kterou vyjadřuje princip energie (l. c., p. 10.). Stanovíme-li energii nějakého systému, můžeme na základě jeho energie určit měřením vlastní energií jiných systémů, na něž může onen systém energeticky působiti. Není ovšem předem patrné, lze-li opravdu stanoviti pokusně energii onoho prvního systému, o níž víme jen tolik, že splňuje princip energie. Proto ukáži dále (§ 3.), jak by bylo možno experimentem stanoviti vlastní energii tuhého tělesa při postupném pohybu. Známe-li vlastní energii, můžeme určit také sílu působící na systém. Vzhledem k definici síly (l. c., p. 12., 30.) jsou její složky rovny koeficientům

lineární formy diferenciálů parametrů, která udává práci dodanou systému při dotyčné infinitesimální změně konfigurace. Známe-li také složky síly jako funkce stavu systému, můžeme přímo aplikovat uvedené rovnice na každý dynamický systém.

§ 2. Ve zmíněné práci jsem poukázal také na to, že při axiomatickém vybudování fyziky je třeba voliti určité základní předpoklady, z nichž by bylo možno čistě deduktivně odvoditi zákony platné pro uvažované systémy.

Nemůžeme-li předem definovati energii obecného dynamického systému, můžeme tak učiniti v jednotlivých případech, kdy máme na mysli zcela určité systémy. Aby nebylo nutno definovati energii každého konkrétního systému, zvolíme některé jednoduché systémy základní, jichž kombinací lze vytvořiti systémy složitější. Abychom pak mohli tímto způsobem dojiti k co možná rozličným systémům, musí býti ony základní systémy obsaženy v co největším počtu systémů vyskytujících se ve skutečnosti, musí býti elementy, z nichž sestávají konkrétní systémy. Mimo to je třeba znáti předpis, jak je stanovena energie složeného systému na základě energií systémů v něm obsažených. Nejvýhodnější bude, užijeme-li takových základních systémů v něm obsažených, jichž energie se prostě sčítají, superponují. Tyto systémy, od nichž budeme vycházeti při stanovení energie ostatních systémů, označím jako *elementární* a postulují pro ně tuto základní vlastnost: *vlastní energie systému je rovna součtu energií všech elementárních systémů v něm obsažených*. Prohlásíme-li tedy určité systémy za elementární, je tím již stanoveno, že energie každého systému z nich vytvořeného rovná se součtu energií vytvářejících elementárních systémů. Obecně mohl by nastati případ, že některý elementární systém je obsažen v jiném, resp. že některý z nich lze vytvořiti pomocí jiného. Ale v každém případě je celková energie libovolného konkrétního systému rovna součtu všech elem. systémů vytvářejících. Energie těchto jsou však navzájem nezávislé a stanoveny definitoricky.

Budíž podotknuto, že ony elem. systémy nemusí se samy o sobě vyskytovat, mohou to býti po případě systémy myšlené, jež můžeme realizovati jen jakožto elementy systémů komplikovanějších.

Podář-li se nám najíti vhodné elem. systémy, máme již vše, co potřebujeme k odvození zákonů platných pro libovolný dynamický systém, který vznikl jich syntesou.

Skutečně lze udati čtyři takové systémy, z nichž můžeme vytvořiti nejdůležitější dynamické systémy. Jsou tyto:

- (A) *hmotný element (hmotná částice),*
- (B) *dvojice hmotných elementů,*
- (C) *dvojice elementárních elektrických nábojů v homogenním isotropickém dielektriku,*

(D) dvojice elementárních elektrických proudů obklopených homogenním isotropickým prostředím.

Tyto čtyři systémy tedy prohlašujeme za systémy elementární a definujeme jejich energii: Energie dE_A systému A nechť se skládá z energie kinetické a tepelné. První budiž úměrná čtverci rychlosti elementu, druhá $d\Theta$ pak funkcí pouze teploty ϑ :

$$(4) \quad dE_A = \frac{dm}{2} v^2 + d\Theta,$$

při čemž v značí rychlost částice, dm určitou nekonečně malou konstantu, která částici charakterisuje a kterou nazveme její (setrvačnou) hmotou. Energie systému B budiž funkcí polohy obou elementů. Z axiomu (I) plyne ovšem, že závisí jen na jejich vzájemné poloze. Označme dále náboje tvořící systém C de_1, de_2 , jejich vzdálenost r a definujeme energii dE_C tohoto systému rovnicí:

$$(5) \quad dE_C = \frac{1}{\varepsilon} \frac{de_1 de_2}{r},$$

v níž značí ε konstantu (dielektrickou), která závisí na volbě dielektrika. Konečně uvažujme dva prostorové elementy dS_1, dS_2 ve vzdálenosti r , jimiž probíhá elektrický proud hustoty $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$ (vektory). Energie tohoto systému D budiž

$$(6) \quad dE_D = \mu \frac{\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2}{r} dS_1 dS_2,$$

kde μ je pro určité prostředí stálé (permeabilita).

Fysikální systémy utvořené z těchto čtyř elementárních systémů možno rozdělit na několik skupin. Ty, jež obsahují pouze A a B, jsou tak zv. systémy *mechanické*. Předpokládáme-li zároveň, že teplota se během děje nemění, mluvíme o ději čistě mechanickém. Procesy, jež se odehrávají v systémech složených z A, B a C, shrnujeme pod názvem *elektrostatiky*. Konečně všechny čtyři elementární systémy mohou vytvořit systémy *elektrodynamické* po př. *elektromagnetické*. Podobně lze tříditi silové působení podle toho, na jaké systémy energeticky působí. V tom smyslu rozeznáváme síly mechanické, elektrické (elektrostatické) a magnetické.

§ 3. Nejjednodušší mechanický systém představuje hmotná částice, elem. systém A. Tento systém jest ovšem dynamický, neboť čtverec rychlosti v pravouhlých souřadnicích je součtem čtverců derivací souřadnic částice. Aplikací dynamických rovnic docházíme k pohybovým rovnicím Newtonovým.

Snadno seznáme, že všechny mechanické systémy jsou dynamické. Aktuální energie soustavy n hmotných částic

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \dot{x}_k^2,$$

při čemž hmota k -té částice jest $m_{3k-2} = m_{3k-1} = m_{3k}$ a x_{3k-2} , x_{3k-1} , x_{3k} , jsou její pravoúhlé souřadnice. Pro pohyb takového bodového systému v nejobecnějším případě anholonomních vazeb rheonomních

$$dx_r = \sum_{\varrho=1}^{\nu} \beta_{\varrho}^r d\pi_{\varrho} + \beta^r dt$$

platí podle (2) v nezávislých anholonomních parametrech π_{ϱ} rovnice

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \pi_{\varrho}} - \frac{\partial T}{\partial \pi_{\varrho}} + \sum_{r=1}^n m_r \dot{x}_r \left(\frac{\partial \beta^r}{\partial \pi_{\varrho}} - \frac{\partial \beta_{\varrho}^r}{\partial t} \right) + \\ & + \sum_{r=1}^n \sum_{\kappa=1}^{\nu} m_r \dot{x}_r \left(\frac{\partial \beta_{\kappa}^r}{\partial \pi_{\varrho}} - \frac{\partial \beta_{\varrho}^r}{\partial \pi_{\kappa}} \right) \dot{\pi}_{\kappa} + \frac{\partial U}{\partial \pi_{\varrho}} = \Pi_{\varrho}, \end{aligned}$$

kteří po prvé odvodil *L. Boltzmann* (Wissensch. Abh., III, p. 690.)

Také můžeme uvažovati soustavu nekonečně mnoha elementů. Má-li mítí taková soustava konečný počet stupňů volnosti, musí platit mezi souřadnicemi elementů nekonečně mnoho vztahů tak, aby počet nezávislých parametrů byl konečný. Je patrné, že v každém případě bude kinetická energie kvadratickou funkcí derivací parametrů. Můžeme tedy tvrditi, že pro každý systém mechanický o konečném počtu stupňů volnosti platí rovnice (2).

U soustav hmotných částic musíme bráti v úvahu také energii elem. systémů **B** obsažených v dané soustavě. Je to energie potenciální, která závisí na relativní poloze jednotlivých částic. Kdybychom předpokládali energii systému **B** ve tvaru analogickém výrazu (5),

$$(7) \quad dE_B = \kappa \frac{dm_1 dm_2}{r},$$

plynul by odtud pro libovolná tělesa Newtonův *gravitační zákon*. V některých případech můžeme však od potenciální energie abstrahovati, jako u tělesa tuhého, kdy je stálá. Tuhé těleso lze si představití jako souhrn nekonečně mnoha elementů, jichž vzájemná poloha je neproměnná, takže stupeň volnosti je roven šesti. Pro kinetickou energii plyne pak z rovnice (4) výraz

$$(8) \quad T = \frac{m}{2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) + \frac{A}{2} w_x^2 + \frac{B}{2} w_y^2 + \frac{C}{2} w_z^2 - F w_y w_z - G w_z w_x - H w_x w_y,$$

kde x_0, y_0, z_0 jsou souřadnice těžiště, A, B, C, F, G, H momenty setrvačnosti a deviační, vzhledem k souřadným osám $m = \int dm$ celková hmotu tělesa w_x, w_y, w_z složky rotační rychlosti tělesa kolem těžiště. Zvolíme-li za parametry na př. souřadnice těžiště a Eulerovy úhly, bude T kvadratickou formou derivací těchto šesti parametrů, neboť w_x, w_y, w_z jsou lineární formy derivací Eulerových úhlů.

Označil jsem $\int dm$ jako celkovou hmotu tělesa. Setrvačnou hmotu tělesa můžeme definovat jako dvojnásobek poměru kinetické energie ke čtverci rychlosti translačního pohybu. Z předpokladu, že hmotný element je systémem elementárním, plyne, že hmoty jednotlivých částic se sčítají. Aditivnost hmoty je tedy důsledkem aditivnosti energie postulované pro elem. systém A.

Pomocí elem. systémů A a B lze stanovit také energii kapalin a plynů, přibereme-li některé další předpoklady, jež souvisí se speciálními vlastnostmi uvažovaných látek. V obecném případě spojitých hmot jedná se ovšem o systémy nekonečně velké volnosti. Takových systémů jsem v citované práci neuvažoval, proto nebudu se zabývat aplikací získaných rovnic na takové systémy, které se vyskytují na př. v hydrodynamice.²⁾

Jde-li však o spojitě útvary hmotné o konečném počtu stupňů volnosti, jsme oprávněni aplikovat obecné rovnice, jakmile stanovíme energii na základě elem. systémů. Je třeba jen zjistit, že uvažovaný systém je dynamický a vnější působení silové. Tak můžeme na př. na základě energie tuhého tělesa (8) přímo z rovnic Lagrange-Eulerových odvodit *Eulerovy rovnice*.

Konečně lze poznamenat, že *věta o skládání sil* plyne z obecně platné věty: při současném působení více sil na tž systém působí jednotlivé síly nezávisle, jejich účinky se superponují. (I. c., p. 18. (IV)).

Z dosavadních výsledků neplynou ovšem věty impulsové, které spočívají na *principu akce a reakce*. Můžeme je však vyvodit na základě principu energie pomocí axiomu (I). Na myšlence v podstatě stejné odvodil princip akce a reakce *Planck*,³⁾ který užil předpokladu, že síly působící mezi dvěma body lze derivovat z potenciální energie, jež je funkcí pouze vzájemné vzdálenosti obou bodů, ke kterému přibral také svůj princip superposice energií. Podobně *Helm*⁴⁾ vyšel ze suposice, že práce sil při paralelním posunutí dvou bodů je rovna nule, kterou odůvodňuje tím, že takový posuv lze převést na transformaci soustavy souřadné. Aplikací téhož úsudku na otočení obou bodů kolem jednoho z nich,

²⁾ Lamb-Friedel: Lehrbuch der Hydrodynamik, Teubner 1907, Kap. VI.

³⁾ M. Planck: Das Prinzip der Erhaltung der Energie, Teubner 1908, p. 184., 185. (srov. I. c. p. 4).

⁴⁾ G. Helm: Die Energetik nach ihrer gesch. Entw., 1898, p. 253.

dochází k tomu, že směr síly leží v jejich spojnici. Avšak Planckovo užití principu superposice nespočívá na obecně vyslovených předpokladech, Helмова ekvivalence posunutí bodů a soustavy souřadné pak je pouze formální, neboť síla koná práci jen při skutečném posuvu bodu v absolutním prostoru, což není děj fyzikálně totožný s posunutím souřadné soustavy, při němž bod nezmění polohy. Mimo to nelze beze všeho předpokládati, že může nastati rovnoběžné posunutí obou bodů bez pomoci vnějších sil.

Domnívám se, že právě odůvodnění zmíněných předpokladů spočívá v axiomu (I) a že vhodné odvození věty o rovnosti akce a reakce možno provést asi tímto způsobem, při němž není třeba úvah o systémech souřadných. Mějme systém n hmotných elementů. Sílu, již působí k -tý na h -tý, označme jako vektor \vec{f}_{kh} . Působme nyní na h -tý element vnější silou \vec{f}_h ($h = 1, 2, \dots, n$) tak, aby systém jako celek konal rovnoměrnou translaci. Pak se každý element pohybuje podle zákona setrvačnosti, takže

$$\sum_k \vec{f}_{kh} + \vec{f} = \theta.$$

Zařídíme-li věc tak, aby se při posuvu měnila jen absolutní poloha systému v prostoru, bude podle (I) vlastní energie systému stálá. Tedy při libovolném takovém posuvu $d\vec{s}$ musí být práce vnějších sil rovna nule, nebo podle hořejšího vztahu

$$\sum_{k,h} \vec{f}_{kh} d\vec{s} = \theta.$$

Předpokládáme-li pak, že \vec{f}_{kh} nezávisí na volbě onoho posunutí

$$(9) \quad \sum_{k,h} \vec{f}_{kh} = \theta.$$

Chceme-li systém otočiti jako celek kolem libovolné osy o nekonečně malý úhel $d\omega$, stačí voliti posuv každého elementu tak, aby

$$d\vec{s}_h = [d\omega \vec{r}_h],$$

při čemž $d\omega$ je vektorové označení rotace, \vec{r}_h vztažený vektor h -tého elementu vzhledem k libovolnému bodu osy rotace a závorka na pravo značí vektorový součin. Předpokládejme nyní, že rotace je rovnoměrná, takže výsledná síla působící na každý element jest kolmá ke směru pohybu, nekoná práce. Podle (I) však práce vnějších sil je nulou a v důsledku právě řečeného také celková práce sil vnitřních

$$\sum_{k,h} \vec{f}_{kh} d\vec{s}_h = \sum_{k,h} [\vec{r}_h \vec{f}_{kh}] d\omega = \theta,$$

takže

$$(10) \quad \sum_{k, h} [v_h \check{f}_{kh}] = \theta.$$

Tato rovnice, jež platí pro libovolný bod vztažený, spolu s rovnicí (9) praví (za předpokladu, že f_{kh} nezávisí na rychlostech elementů), že *síly působící mezi hmotnými elementy splňují princip akce a reakce a že jsou centrální*. Odtud plyne věta o rovnosti akce a reakce mezi dvěma libovolnými tělesy. Relace (9) a (10) vedou konečně známým způsobem k oběma větám impulsovým.

Tím jsme probrali systémy vytvořené pomocí A a B. Základním předpokladem při tom bylo, že energie systému A je úměrna čtverci rychlosti. Element hmotný můžeme přibližně realizovati malou částicí hmoty. Každá taková částice má ovšem konečné rozměry, takže při obecném pohybu přistupuje ke kinetické energii postupného pohybu ještě energie rotace. Koná-li však ona částice pouze translační pohyb, můžeme ji pokládati za bodový útvar — *hmotný bod*, který lze charakterisovati jako tuhé těleso, jehož stav se nemění, pokud při stálé teplotě aspoň jeden jeho geometrický bod je v klidu. Chtěl bych nyní ukázat, že energii takového hmotného bodu (realisovaného nerotujícím tuhým tělesem) můžeme stanovit experimentálně na základě principu energie, bez dalších předpokladů.

Postupujme takto. Necháme bod dopadnouti na nepružnou desku v kalorimetru a zjistíme tepelný stav. Při tom shledáme, že po dopadu nastalo oteplení. Této změně tepelného stavu systému tvořeného bodem a kalorimetrem odpovídá přírůstek tepelné energie, který podle principu energie musí se rovnati klesnutí kinetické energie dopadnuvšího bodu, jenž přešel ze stavu pohybu do klidu. Kdybychom zároveň stanovili průběh rychlosti na malé dráze před dopadem, seznali bychom, že konečná teplota nezávisí na tom, jak se rychlost mění v okamžiku rázu, že závisí jen na rychlosti samé. Podle (I) musí býti funkcí pouze její velikosti. Pak zdvojnásobíme rychlost bodu při rázu, při čemž shledáme, že teplota vystoupí na tutéž výši, opakujeme li pokus s původní rychlostí čtyřikrát. K zamezení tepelných ztrát při opakování pádu téhož bodu mohli bychom již při prvním pokuse vložiti do kalorimetru další tři body shodné s prvním, po změření teploty pak všechny vyjmouti a po vyrovnání teplot nechati dopadnouti současně nebo krátce za sebou na desku kalorimetru. Konstatovali bychom při libovolné rychlosti, že výsledná teplotura je táž, dopadne-li jeden bod nebo čtyři poloviční rychlostí. Z toho bychom usoudili, že je energie úměrna čtverci rychlosti.

Konstanty úměrnosti by sejevily pro různé body různé; jejich poměr pro dva body lze určit takto: Jeden vložíme do kalorimetru, druhý necháme dopadnouti libovolnou známou rychlostí a

změříme výslednou teplotu. Potom pokus opakujeme, zaměnívše oba body, při čemž rychlost volíme tak, aby nastal po rázu týž tepelný stav jako po prvé (vhodnou rychlost stanovíme na př. interpolaci). Pak můžeme tvrditi, že energie obou bodů byla těsně před rázem stejná, z čehož plyne pro poměr konstant hodnota rovná čtverci převráceného poměru rychlostí. Zvolíme-li jednotku délky, času a energie, je tím stanovena hmotá bodu, kterou definujeme jako dvojnásobek zmíněné konstanty.

Budiž podotknuto, že jsme nečinili nijakých předpokladů o tepelné energii mimo jediný — který plyne z principu energie —, že energie jest jednoznačnou funkcí stavu, v našem případě tepelného.

§ 4. Nyní budeme uvažovati systémy, které obsahují mimo **A** a **B** také **C**. Je patrné, že z rovnice (5) plyne ihned *Coulombův zákon*, mimo to aditivnost nábojů ležících v tomtéž bodě prostoru. Připojíme-li totiž k náboji de_2 náboj de_3 , bude

$$dE_C = \frac{1}{\varepsilon} \frac{de_1 de_2}{r} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{de_1 de_3}{r} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{de_1 (de_2 + de_3)}{r},$$

takže výsledný náboj v druhém bodě je roven algebraickému součtu obou částí.

Energii (5) bychom mohli dáti také tvar analogický energii systému **D**, předpokládáme-li, že náboj je rozdělen v prostoru s hustotou ρ . Pak dva elementy prostoru dS_1 , dS_2 mají energii

$$(5') \quad dE_C = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\rho_1 \rho_2}{r} dS_1 dS_2.$$

Každý elektrostatický systém můžeme rozložit na elem. systémy **C** a sečtením všech energií obdržíme energii úhrnnou. Odtud plyne jednotka náboje, jakmile zvolíme jednotku energie a konstantu ε pro určité dielektrikum,

Tyto výsledky postačí ovšem jen pro malé rychlosti nábojů. Pohybují-li se větší rychlostí, je nutno uvažovati také energii elektrokinetickou, která odpovídá oné části energie, kterou jsme označovali jako aktuální. Definoval jsem ji pro myšlený systém elementární **D** rovnicí (6), z níž ovšem to není přímo patrné, ale snadno se o tom přesvědčíme při dějích *kvasistacionárních*, na které omezíme další úvahy.

Energii libovolného systému vodičů dostaneme z (6) integrací. Na př. soustava n lineárních vodičů c_k , jimiž probíhá proud intenzity i_k , představuje dynamický systém, neboť aktuální energie

$$(11) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n L_{jk} i_j i_k,$$

při čemž

$$(12) \quad L_{jk} = \mu \int_{(c_j)} \int_{(c_k)} \frac{d\mathbf{l}_j d\mathbf{l}_k}{r},$$

značí-li vektory $d\mathbf{l}_j$, $d\mathbf{l}_k$ elementy vodiče c_j resp. c_k . Zároveň jsme užili předpokladu, že elektrický náboj jest nezničitelný a nevytvořitelný, takže proudí jako nestlačitelná kapalina a intenzita ve všech elementech téhož vodiče je ve stejném čase stejná. Postulujeme-li dále platnost zákona Jouleova, můžeme již odvoditi základní zákony platné pro náš systém.

Uvažujme tedy n lineárních vodičů v prostředí permeability μ . Do každého z nich budiž vřazen kondensátor neproměnné kapacity C_k a baterie elektromotorické síly E_k , jež se mění během času známým způsobem. Připustme dále, že na vodiče působí dané vnější síly, jež mohou měniti tvar i polohu vodičů. Odpor R_k každého z nich však budiž stálý.

Jedná se nyní o vlastní energii. Elektrostatickou energii stačí uvažovati pouze u kondensátorů. Podle známého vzorce, který ovšem plyne z (5), přísluší každému z nich energie

$$\frac{1}{2} \frac{e_k^2}{C_k},$$

značí-li e_k náboj kladné desky. Pokládáme-li pohyby jednotlivých vodičů za dostatečně pomalé, takže lze zanedbati elektrodynamické účinky tak vzniklého pohybu nábojů, jest úhrnná aktuální energie rovna (11). Jde ještě o volbu parametrů. Stav našeho systému jest určen okamžitým tvarem a polohou vodičů, náboji kondensátorů a intenzitami proudů. Pohyb všech elementů vodičů pokládáme totiž za nesmírně pomalý a rovnoměrný. Baterie do systému nepočítáme. Z definice klidu plyne, že konfigurace systému je stanovena jednoznačně náboji kondensátorů a polohou a tvarem vodičů. Označíme-li elektromotorickou sílu E_k tak, že kondensátor nabíjí, je-li kladná, můžeme za parametry voliti přímo náboje kondensátorů, nebo — což je totéž — celková množství elektřiny e_k , jež v každém vodiči dodala elektromotorická síla od počátku existence systému. Ostatní parametry, určující geometrické sestavení vodičů, označme q_1, q_2, \dots, q_s , značí-li s součet volností všech vodičů. Potom e_k jsou intensity proudu ve směru působení baterií. Zanedbali jsme část elektrodynamické energie vzniklou pohybem vodičů, ale kdybychom toho neučinili, byla by úhrnná aktuální energie kvadratickou formou derivací všech $n + s$ nezávislých parametrů. Neboť přesně vzato jest energie součtem bilineárních forem složek rychlostí jednotlivých elementů vodičů, jež jsou lineárními funkcemi derivací parametrů q_i . Uvažovaný systém je tedy dynamický vzhledem ke všem parametrům, takže obecně platně

výsledky získané z principu energie nás předem opravňují aplikovati dynamické rovnice na systém vodičů a to i pro parametry q_l . Skutečně je známo, že pro takový systém lze s úspěchem užítí Lagrangeových rovnic.⁵⁾

Potenciální energie

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{e_k^2}{C_k}$$

takže pro n parametrů e_k obdržíme

$$\frac{dG_k}{dt} + \frac{e_k}{C_k} = P_k,$$

při čemž

$$(13) \quad G_k = \sum_j L_{jk} e_j.$$

P_k značí složky vnější síly v parametrech e_k , G_k nazýváme složkami impulsu (l. c., p. 33., 34.). Komponenty P_k stanovíme z práce vykonané při změně nábojů o libovolné přírůstky de_k . Podle definice elektromotorické síly vykoná k -tá baterie práci $E_k de_k$. Na Jouleovo teplo spotřebuje se však za čas dt energie

$$R_k i_k^2 dt = R_k e_k de_k.$$

To můžeme interpretovati jako působení síly o složkách $-R_k e$. Tím jsme za učiněných předpokladů vyčerpali všechny zdroje i ztráty energie, které nastanou při změně nábojů, ježto mechanické síly působící na vodiče nekonají práce při průchodu proudu. Jest tedy

$$P_k = E_k - R_k e_k,$$

takže

$$(14) \quad \frac{dG_k}{dt} + \frac{e_k}{C_k} + P_k e_k = E_k.$$

Pro parametry q_l však

$$\frac{\partial T}{\partial q_l} = \theta,$$

takže i v nejobecnějším případě anholonomních vazeb obdržíme dle (1)

$$(15) \quad - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l.$$

Tyto rovnice spolu s (14) stanoví průběh dějů v našem systému při daném počátečním stavu.

⁵⁾ Na př. J. H. Jeans: The mathematical theory of electricity and magnetism 3. edition, Cambridge 1915, p. 494—502.

Jde-li na př. o jediný vodič, obdržíme, píšeme-li opět i místo e .

$$\frac{d(Li)}{dt} + Ri + \frac{e}{C} = E.$$

Vyřadíme-li kondensátor a je-li vodič neproměnného tvaru, plyne integrací známá rovnice, která při konstantním E vede k *Ohmovu zákonu* pro stacionární proud. Ponecháme-li však kondensátor a vypneme baterii, dostaneme z hořejší relace *výbojovou rovnici*. Jsou-li v rovnici (14) všechna G_k konstantní a označíme-li potenciální diferenci k -tého kondensátoru v_k , bude

$$R_k i_k = E_k - v_k,$$

při čemž v_k je měřeno proti E_k . Je-li tedy v kruhu více elektromotorických sil či potenciálních diferencí a měříme-li všechny ve stejném směru, je součin odporu a intensity roven součtu potenciálních diferencí. Tím získáváme *druhý zákon Kirchhoffův* (první je důsledkem předpokladu o nezničitelnosti náboje). Jsou-li však G_k s časem proměnná, dostaneme

$$R_k i_k = E_k - \frac{dG_k}{dt},$$

čímž docházíme k Faradayovu *indukčnímu zákonu*, jakmile stanovíme fyzikální význam impulsu G_k .

Nejprve však rozšíříme své úvahy na *magnetismus* na základě předpokladu, že spočívá v elementárních uzavřených proudcích (cirkulujících elektronech). Uvažujme tedy dvě uzavřená proudová vlákna c_1, c_2 o intenzitách i_1, i_2 . Ponderomotorické síly, jimiž na sebe působí, určíme z rovnic (15). Tyto platí přesně jenom v případě klidu vodičů, po případě pro děje rovnovážné. Pak jest podle (3)

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k.$$

V našem případě tedy nazýváme elektrodynamickým potenciálem funkci

$$V = -T,$$

jejíž pokles při změně tvaru a polohy vodičů — za stálých proudů — udává práci vykonanou ponderomotorickými silami. Pro uvažovaná proudová vlákna vzhledem k (11), (12)

$$V = -\mu \int_{(c_1)} \int_{(c_2)} \frac{i_1 i_2}{r} d\mathcal{L}_1 d\mathcal{L}_2,$$

čili

$$V = -\mu i_1 \int_{(c_1)} \mathcal{A}_2 d\mathcal{L}_1,$$

je-li

$$(16) \quad \mathfrak{A}_2 = \int_{(c_2)} \frac{i_2 d\mathfrak{L}_2}{r}$$

Označme nyní element libovolné plochy procházející vodičem c_1 vektorově $d\mathfrak{p}_1$. Pak podle věty Stokesovy

$$V = -\mu i_1 \int_{(\mathfrak{p}_1)} \text{rot } \mathfrak{A}_2 d\mathfrak{p}_1.$$

Nechť se nyní vlákno c_1 zmenšuje až na velmi malý elementární proud plochy $d\mathfrak{p}_1$. Zavedeme-li označení

$$(17) \quad i_1 d\mathfrak{p}_1 = d\mathfrak{M}_1, \quad \text{rot } \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{H}_2, \quad \mu \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{B}_2,$$

přejde V v diferenciál

$$dV = -\mu \mathfrak{H}_2 d\mathfrak{M}_1 = -\mathfrak{B}_2 d\mathfrak{M}_1.$$

Působí tedy vodič c_2 na elementární proud otáčivým momentem, neboť

$$-\frac{\partial}{\partial \varphi} (dV) = -B_2 dM_1 \sin \varphi,$$

značí-li dM_1 , B_2 resp. φ velikosti resp. úhel vektorů definovaných v (17). Na hmotu obsahující elementární proudy působí elektrický proud momentem, který obdržíme z celkového potenciálu oné látky a vodiče:

$$-\mathfrak{B} \mathfrak{M}.$$

Je-li vektor \mathfrak{M} různý od nuly, nazýváme látku *magnetem* a \mathfrak{M} jeho *momentem*. Vektorové pole \mathfrak{H} nazýváme magnetickým, pole \mathfrak{B} indukčním. Z hořejších rovnic vyplývá ovšem také vzájemné působení magnetů na magnety.

Nyní můžeme již stanoviti fysikální význam impulsu systému vodičů. Podle (13) jest vzhledem k (12), (16) a (17)

$$G_k = \mu \int_{(c_k)} \mathfrak{A} d\mathfrak{L}_k = \int_{(\mathfrak{p}_k)} \mathfrak{B} d\mathfrak{p}_k,$$

kde

$$\mathfrak{A} = \sum_{j=1}^n \mathfrak{A}_j,$$

takže G_k představuje úhrnný tok indukčního pole \mathfrak{B} plochou k -tého vodiče.

Na základě získaných výsledků můžeme již odvoditi obě serie *Maxwellových rovnic*. Kdybychom postulovali, jejich platnost i pro

Maxwellův proud posunutí, mohli bychom přejít k nekvasistacionárním zjevům elektromagnetickým.

§ 5. Dosud jsme nepřihlíželi k tepelným změnám hmot tvořících fyzikální systémy, takže bylo možno pokládati tepelnou energii za stálou. Nyní budeme předpokládati, že také tepelný stav těles, stanovený libovolnou tepelnou stupnicí ϑ , mění se spojitě s časem. Není ovšem ihned patrné, že také pro ϑ platí odvozené rovnice, neboť jsme při odvození předpokládali, že systém jest aspoň druhého řádu (l. c., p. 17.), kdežto derivace ϑ podle času v tepelné energii, jak jsme ji definovali v § 2., nevystupuje. Snadno se však přesvědčíme, že užitý postup (l. c., p. 18) poskytuje žádané rovnice i v případě, kdy derivace jednoho z parametrů nevystupuje mezi veličinami určujícími stav systému, jsou-li mezi nimi derivace všech ostatních parametrů. Pak totiž vzhledem k nezávislosti síly a počátečního stavu, musí rovnice energie platiti pro všechny hodnoty derivací ostatních parametrů, takže také koeficient u $d\vartheta$ resp. $\dot{\vartheta}$ anulované rovnice energie musí být roven nule.

Další úvahy omezím na jednoduchý *homogenní systém*. Mějme 1 gr homogenní, isotropické látky, jejíž potenciální energie nechť nezávisí na tvaru, jejíž v prostoru zaujímá. Tento systém obsahuje patrně elementární systémy A a B, takže potenciální energie skládá se z úhrnné energie tepelné všech hmotných částic látky a z celkové energie všech systémů B. O poslední předpokládejme, ježto nezávisí na tvaru, že jest funkcí pouze objemu (specifického) v . Budeme ji nazývati energií objemovou a označíme ji V . Celkem tedy

$$(18) \quad U = \Theta + V.$$

Za těchto předpokladů bude energie uvažovaného systému funkcí ϑ , v a derivace v podle času, neboť při změně objemu musí jisté části hmoty měniti polohu, což je spojeno se vznikem kinetické energie.

Abychom úlohu zjednodušili, uvažujme pouze děje velmi malé (zvratné), při nichž látka probíhá vesměs stavy *rovnovážnými*. Pak můžeme aplikovati rovnice (3), jakmile stanovíme složky síly. K tomu je třeba zjistiti, jakým způsobem lze měniti energii látky. Vnější tlak p koná práci jen při změně objemu, která při zvětšení dv je rovna $-pdv$. Dále můžeme systému dodat energii tepelnou. Je-li celkové množství tepla (v jednotkách energie) dodané systému při změně konfigurace ($d\vartheta$, dv) rovno dQ , plyne z předpokladu, že vnější působení je silové, možnost vyjádřiti dQ ve tvaru:

$$(19) \quad dQ = Q_\vartheta d\vartheta + Q_v dv,$$

při čemž Q_ϑ , Q_v jsou obecně funkce stavu. Do rovnic (3) tedy dosadíme

$$\Pi_\vartheta = Q_\vartheta, \quad \Pi_v = Q_v - p,$$

takže obdržíme relace

$$(20), (21) \quad \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = Q_{\vartheta}, \quad \frac{\partial U}{\partial v} = Q_v - p,$$

kteřé platí přesně v rovnovážných stavech, tedy velmi přibližně také při dějích nesmírně pomalých, zvratných. Nejsou-li splněny identicky, určují při daném vnějším působení konečný počet dvojic hodnot ϑ a v , jež stanoví konfigurace, v nichž nastává rovnováha. Koeficienty Q_{ϑ} a Q_v , jichž fyzikální význam je patrný (viz dále), lze stanovit experimentálně jako funkce stavu, kdežto tlak p je na stavu nezávislý. Rovnice (21) tedy nemůže být splněna identicky a vyjadřuje v každém případě skutečnou podmínku mezi ϑ a v při daném p . Naproti tomu však snadno seznáme, že rovnice (20) musí být splněna identicky. Její tvar totiž by zůstal nezměněn i v případě libovolného děje, jakkoli rychle probíhajícího, ježto kinetická energie nedosahuje ani ϑ ani $\dot{\vartheta}$. Je tedy (20) jednou z dynamických rovnic, které musí být splněny během každého děje. Jsou-li tedy možné děje, při nichž se mění teplota, musí být relace (20) splněna identicky, což budeme v dalším předpokládati. Pak představují $\frac{\partial U}{\partial \vartheta}$ a Q_{ϑ} tutéž veličinu a jedinou podmínku vyjadřuje rovnice (21), kterou nazveme *rovnici stavovou*. Tím je tedy úloha zásadně řešena na základě obecně platných důsledků principu energie a silového axiomu.

Užijeme-li rovnice (18), odvodíme z (20)

$$(22) \quad \Theta = \int Q_{\vartheta} d\vartheta,$$

při čemž Q_{ϑ} závisí jen na teplotě.

K podrobnějšímu vyjádření stavové rovnice dojdeme, zavedeme-li určitou škálu tepelnou pomocí *II. hlavní věty termodynamické*, kterou pro zvratné děje vyslovíme takto: lze zavést takovou tepelnou stupnici T (ϑ), (absolutní), že $\frac{dQ}{T}$ jest úplný diferenciál funkce stavu (entropie). Označme pak

$$Q_{\vartheta} \frac{d\vartheta}{dT} = Q_T,$$

takže

$$(20') \quad \frac{\partial U}{\partial T} = Q_T$$

a

$$(23) \quad dQ = Q_T dT + Q_v dv.$$

Podle *II. hlavní věty* však

$$T \frac{\partial Q_v}{\partial T} - T \frac{\partial Q_T}{\partial v} = Q_v$$

a ježto vzhledem k (18)

$$\frac{\partial Q_T}{\partial v} = \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial v} = \theta,$$

plyne integrací

$$(24) \quad T = \varphi(v) Q_v,$$

značí-li φ arbitrární funkci jedné proměnné. Dosadíme-li odtud za Q_v do (21), získáme v důsledku rov. (18) stavovou rovnici ve tvaru

$$(25) \quad T = \varphi(v) \left(p + \frac{dV}{dv} \right),$$

kteřá vyjadřuje vztah mezi třemi proměnnými T , v , p .

Lze však i funkci φ blíže určit. K tomu účelu bude výhodnější pokládati za nezávisle proměnné p a v . Pak lze psát patrně (cf. ³⁾ p. 219.)

$$dQ = c_v \frac{\partial T}{\partial p} dp + c_p \frac{\partial T}{\partial v} dv,$$

kde c_v , c_p jsou specifická tepla při stálém objemu resp. tlaku, takže srovnáním s (23) plynou vztahy

$$(26) \quad Q_T = c_v, \quad Q_v = (c_p - c_v) \frac{\partial T}{\partial v},$$

kteřé lze odvoditi také přímou úvahou. (První je ihned zřejmý, druhý plyne z okolnosti, že $Q_v dv$ je teplo, jež je třeba látky dodat, aby při změně dv objemu neměnila teplotu.) Pišme nyní

$$(27) \quad c_p - c_v = r$$

a derivujeme rov. (24) a (26) parciálně podle p . Srovnáním výsledků obdržíme

$$\varphi(v) \left(r \frac{\partial^2 T}{\partial v \partial p} + \frac{\partial r}{\partial p} \frac{\partial T}{\partial v} \right) = \frac{\partial T}{\partial p}.$$

Abychom odtud mohli snadno stanovit funkci φ , učiňme předpoklad, že rozdíl specifických tepel r nezávisí na tlaku. Pak dává hořejší rovnice po dosazení z (25)

$$(28) \quad r \varphi'(v) = 1, \quad \varphi(v) = \int \frac{dv}{r} + k,$$

kde k značí konstantu, jež nezávisí ani na p ani na v . Tím docházíme k této stavové rovnici

$$(29) \quad T = \left(p + \frac{dV}{dv} \right) \left(k + \int \frac{dv}{c_p - c_v} \right),$$

kteřá platí obecně pro látky, jichž vlastní potenciální energie má tvar (18) a rozdíl specifických tepel nezávisí na tlaku.

Mimo to vyplývá z (20') a (26) pro tepelnou energii

$$\Theta = \int c_v dT,$$

při čemž specifické teplo při stálém objemu je funkcí pouze teploty, kdežto objemová energie jest libovolnou funkcí objemu. Konečně entropie látky zmíněných vlastností jest vzhledem k (23), první rovnici (26), (24) a (28) dána výrazem

$$(30) \quad S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{c_v}{T} dT + \int \frac{dv}{\int \frac{dv}{r} + k} + S_0.$$

Podle toho, jaké další předpoklady učiníme o objemové energii a o specifických teplech, dojdeme k různým jednodušším stavovým rovnicím. Suponujme na př., že *objemová energie jest úměrna hustotě látky a že rozdíl specifických tepel je stálý*. Je-li tedy ρ hustota látky a n konstanta úměrnosti, bude

$$v = n\rho = \frac{n}{v}, \quad c_p - c_v = r = \text{konst.}$$

a (29) přejde v rovnici

$$T = \left(p - \frac{n}{v^2} \right) \left(k + \frac{v}{c_p - c_v} \right),$$

kteřá splyne konečně se známou rovnicí van der Waalsovou, volíme-li konstanty n i k záporné. Odpovídá to představě, že objemová energie látky jest potenciálem přitažlivých sil mezi molekulami. Označme tedy

$$a = -n, \quad b = -rk,$$

čímž docházíme k van der Waalsově rovnici v obvyklém tvaru

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = rT.$$

Z naší obecné rovnice (29) vznikla, jak jsme viděli, pomocí jednoduchého předpokladu, že objemová energie jest úměrna hustotě a rozdíl specifických tepel je stálý.

*

V celku je patřno, že užitým postupem bylo dosaženo výsledků shodných se známými fakty, při čemž je třeba zdůrazniti,

že naše metoda je obecná, společná všem uvažovaným případům. Nebylo tedy třeba dovolávat se analogií, které pozorujeme na př. mezi systémy mechanickými a elektrodynamickými. Obdoba tato spočívá právě v tom, že v obou případech má energie stejný tvar, že v obou případech se jedná o systémy dynamické. A platnost rovnic plynoucích pro takové systémy z obecných principů je stejně obecná jako principy samy.

Je třeba také oceniti jednotnost zde naznačeného energetického pojetí, jakož i jednoduchost a malý počet základních předpokladů, které vedou k fundamentálním zákonům pro uvažované systémy.

Proto soudím, že v obecnosti a soustavnosti lze spatřovati skutečnou přednost energetických úvah.

L'établissement des lois physiques au moyen des principes énergétiques.

(Extrait de l'article précédent.)

L'article précédent est un complément de mon travail „*Princip energie a rovnice fysiky*“ (*Le principe de la conservation de l'énergie et les équations de la Physique*, Publications de la faculté des sciences de l'université Charles, no. 25.), où j'ai déduit les équations dynamiques générales, en partant du principe de la conservation de l'énergie (à l'aide de l'axiome dynamique). A ce lieu-ci, je donne des applications de la méthode générale aux cas spéciaux de la mécanique, de l'électricité, et de la thermodynamique. Je me sers des systèmes élémentaires dont j'ai supposé connue (définie) l'énergie, et qui jouissent de la propriété suivante: la somme des énergies de tous les systèmes élémentaires, compris dans un système quelconque, donne l'énergie de ce système. Pour obtenir l'énergie des systèmes physiques les plus importants, il suffit de choisir les quatre systèmes suivants: (A) un élément matériel, (B) deux éléments matériels, (C) deux éléments de la charge électrique, (D) deux éléments du courant, et de définir l'énergie de ces systèmes, p. e. au moyen des équations (4), (7), (5), (6) ($d\theta$ dans (4) signifie une fonction infiniment petite de la température). Pour l'énergie du système (B), on peut aussi prendre, en général, au lieu de la forme spéciale (7) qui conduit à la loi de la gravitation de Newton, une fonction quelconque de la position relative des deux éléments matériels.

En partant de ces idées fondamentales, on peut appliquer les équations générales (1) ou (2) aux systèmes mécaniques et électrodynamiques, d'où résultent les lois bien connues. Pour l'électricité, il est nécessaire seulement d'ajouter la loi de Joule,

pour la mécanique, le III^e axiome de Newton qu'on peut d'ailleurs déduire au moyen du principe de la conservation de l'énergie à l'aide de l'hypothèse de l'homogénéité et de l'isotropie de l'espace. En outre, si l'on accepte, pour le magnétisme, la théorie de courants moléculaires, on arrive aux équations de Maxwell.

En terminant, je déduis, des conditions générales d'équilibre (3), en me servant du second principe de la Thermodynamique, une équation d'état valable pour chaque système homogène dont l'énergie potentielle (18) est la somme de deux termes, le premier Θ étant une fonction de la température, tandis que l'autre V ne dépend que de la densité de la matière. Si l'on suppose de même que la différence des chaleurs spécifiques r (27) soit une fonction quelconque de la densité, on est mené à l'équation (29) qui contient, comme cas particulier (V proportionnel à la densité, r constant), celle de van der Waals.

Les considérations constituant le fond de mon travail peuvent, je crois, faire apprécier la généralité systématique de la méthode énergétique.