Použijíce této konstrukce také ku stanovení poloměru křivosti křivky elliptické v krajních bodech dvou sdružených průměrů nebo obou os tuto křivku určujících, přijdeme k známým konstrukcím, shodujícím se zároveň s oněmi, v prvé části tohoto článku odvozenými. —

O jisté vlastnosti trojúhelníka.

Napsal

Dr. **Antonín Pleskot**,
professor v Plzni.

V čísle 2. VI. ročníku časopisu „L'enseignement mathematique" uvádí Japonec pan Kariya větu tuto:

Opišme ze středu O kružnice vepsané v trojúhelník ABC libovolnou kružnici, jež protne kolmice P_{BC}, P_{AC}, P_{AB} ze středu O na strany BC, AC, AB spuštěné v bodech A_1, B_1, C_1; i protínají se pak přímky AA_1, BB_1, CC_1 v bodě jediném, kterýžto bod nazval „point de Kariya".

Věta tato jest velice speciálním případem věty obecné a bod Kariyův jen zvláštním bodem jistého bodu obecného, patřícího k trojúhelníku danému.

To dovolíme si ukázati v následujícím.

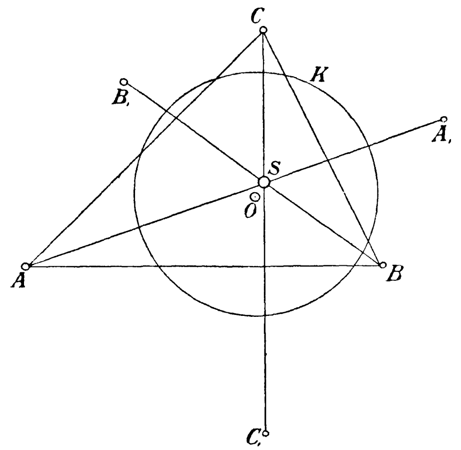
Nechť jest dán trojúhelník ABC (viz obr.) a libovolná kuželosečka K; stanovme poly stran trojúhelníka ABC hledíc ke kuželosečce a ty nechť jsou: pol A_1 patřící ku straně BC, pol B_1 patřící ku straně AC, pol C_1 patřící ku straně AB.

Trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ jsou pak polárně reciproké, o nichž jest známo, že jsou navzájem perspektivické, t. j. spojnice AA_1, BB_1, CC_1 protínají se v bodě jediném S a průsečíky stran stejnolehlých, t. j. průsečíky přímek AB, A_1B_1, — AC, A_1C_1, — BC, B_1C_1, nacházejí se na téže přímce, která jest patrně polárou bodu S, hledíc ke kuželosečce K.

K vůli úplné jasnosti podejme důkaz této věty, který ve formě analytické jest velmi jednoduchý.

Trojúhelník daný volme za základ soustavy trojúhelníkové, takže, označíme-li vrcholy jeho ABC, strany proti těmto vrcholům ležící mají rovnice:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0.$$



Rovnice kuželosečky ať jest:

$$f(x_1, x_2, x_3)$$
$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0;$$

rovnice poláry bodu (x_1', x_2', x_3') hledíc ke kuželosečce zní:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

kdež ve výrazech $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ píšeme za x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_2'.

Je-li strana $x_1 = 0$ polárou, pak souřadnice polu jejího A_1, plynou z rovnic:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

t. j. z rovnic:

$$a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 = 0$$
$$a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 = 0 .$$

Z rovnic těchto obdržíme hodnoty souřadnic x'_1, x'_2, x'_3 a sice:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = (a_{22}a_{33} - a_{23}^2) : (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) : (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}).$$

Přímka spojující bod A s polem A_1 má rovnici tvaru

$$mx_2 + nx_3 = 0;$$

poněvadž na ní leží pol A_1, platí:

$$m(a_{31}a_{32} - a_{12}a_{33}) + n(a_{21}a_{23} - a_{13}a_{22}) = 0.$$

Z posledních dvou rovnic eliminací m a n dostaneme rovnici přímky AA_1:

$$x_2(a_{21}a_{23} - a_{13}a_{22}) = x_3(a_{31}a_{32} - a_{12}a_{33}).$$

Podobně dostaneme rovnici přímky BB_1:

$$x_3(a_{31}a_{32} - a_{12}a_{33}) = x_1(a_{12}a_{13} - a_{23}a_{11}),$$

a rovnici přímky CC_1:

$$x_1(a_{12}a_{13} - a_{23}a_{11}) = x_2(a_{21}a_{23} - a_{13}a_{22}).$$

Že přímky AA_1, BB_1, CC_1 protínají se v bodě jediném, jest přímo patrno, neboť eliminujeme-li z rovnice první a druhé x_3, dospíváme k rovnici třetí.

Zvláštním případem věty hořejší jest věta, kterou p. **Kariya** uvádí.

Volme za křivku K kružnici o středu O; pak poly stran jsou na kolmicích s bodu O na strany trojúhelníka spuštěných ve vzdálenostech $\frac{r^2}{P_{BC}}$, $\frac{r^2}{P_{AC}}$, $\frac{r^2}{P_{AB}}$ a sice od bodu O směrem ku stranám trojúhelníka, je-li kružnice reálná, a ve směru opačném, je-li poloměr kružnice r imaginární.

Tím zjednáváme si větu:

Volíme-li v rovině trojúhelníka libovolný bod O a spustíme-li s něho na strany trojúhelníka kolmice a na ty naneseme délky, jež opačně jsou úměrny vzdálenostem bodu O od stran, pak koncové body těchto délek spojeny s příslušnými vrcholy trojúhelníka protínají se v bodě jediném.

Volíme-li za bod O střed kružnice vepsané v trojúhelník, pak ovšem délky ty jsou stejné a tak dostáváme větu p. Kariya; jest tedy věta poslední jen speciálním případem věty obecné a to jen pro ten případ, že kuželosečka K jest kružnicí a to ještě v té poloze, že střed její stotožňuje se se středem kružnice v trojúhelník vepsané.

Volme ještě některé speciální případy pro bod O.

Budiž bod O na straně trojúhelníka AB; pak příslušný bod C_1 padne do vzdálenosti nekonečně velké a tím dospějeme ku větě:

Spustíme-li s některého bodu O strany AB trojúhelníka ABC kolmice na strany druhé a na ty naneseme délky, jež opačně jsou úměrny vzdálenostem bodu O od stran druhých, pak koncové body A_1 a B_1 těchto délek spojeny s body A a B dávají dvě přímky, jež protínají se vždy na výšce patřící ku straně AB. Volíme-li bod O ve vrcholu trojúhelníka, pak dospíváme ku větě: Výšky trojúhelníka protínají se v bodě jediném.

Zvláštním případem věty obecné, kterou jsme nahoře vyslovili, jest známá věta tato: Je-li trojúhelník kuželosečce opsán, pak spojnice vrcholů s body dotýčnými na protějších stranách protínají se v bodě jediném, neboť poly stran jsou body dotýčné.

Z obecné věty hořejší plyne i věta duálná.

Je-li dána v rovině trojúhelníka ABC kuželosečka K a stanovíme-li poláry a, b, c vrcholů A, B, C, hledíc ke kuželosečce, pak průsečíky přímek a, (BC), — b, (AC), — c, (AB), nacházejí se na téže přímce.

Volíme-li za kuželosečku kružnici, pak dospíváme ku speciální větě:

Je-li v rovině trojúhelníka ABC dán bod O a spustíme-li na spojnice AO, BO, CO kolmé přímky ve vzdálenostech od bodu O, jež mají se k sobě jako $\frac{1}{\overline{OA}} : \frac{1}{\overline{OB}} : \frac{1}{\overline{OC}}$, pak kolmice ty protínají se stranami BC, AC, AB v bodech, jež leží na téže přímce.

Volíme-li bod O ve středu kružnice opsané o trojúhelník, pak dostaneme větu duálnou ku větě p. Kariya:

Spojíme-li střed kružnice opsané o trojúhelník s jeho vrcholy a na tyto spojnice vztýčíme kolmice ve stejných vzdálenostech od bodu O, pak tyto kolmice protínají se s příslušnými stranami trojúhelníka v bodech, jež leží na téže přímce.

Mohli bychom ještě řadu speciálních vět vyvoditi, avšak upouštíme od toho, ježto úvaha naše měla za účel ukázati, že věta a bod Kariyův jsou jen velice zvláštní případy theoremu obecného.

Příspěvek ku theorii a konstrukci křivek racionálných třetího stupně.

Napsal

Dr. Ladislav Fahoun,
professor reálky v Lounech.

I. Učiníme-li dvojný bod racionálné čáry třetího stupně počátkem souřadnic, obdrží rovnice její, není-li přímka $x = 0$ rovnoběžna s její asymptotou, jak známo, tvar

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + y^3 + dx^2 + exy + fy^2 = 0. \qquad (1)$$

Vyjádříme-li úsečku x pomocí proměnného parametru u daného rovnicí

$$y = ux, \qquad (2)$$

obdržíme

$$x = -\frac{d + eu + fu^2}{a + bu + cu^2 + u^3}. \qquad (3)$$

Rozložme tuto racionálnou ryze lomenou funkci v zlomky částečné; má-li rovnice

$$a + bu + cu^2 + u^3 = 0 \qquad (4)$$

všechny kořeny realné různé, lze rozložiti x ve tvaru