Libuše Kučerová

Poznámka ke Cliffordovým rovnoběžkám

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 62 (1933), No. 6, 231--232

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121186

Poznámka ke Cliffordovým rovnoběžkám.

Napsala *L. Kučerová.*

(Došlo 21. listopadu 1932.)

V přednáškách Kleinových[1]) o neeuklidovské geometrii se rozlišují tři druhy párů přímek v eliptickém prostoru, podle počtu jejich společných kolmic:

I. Nerovnoběžné přímky.

II. Rovnoběžné, ale nekonjugované.

III. Konjugované poláry, které jsou vždy rovnoběžné.

V případě II., tak zvané Cliffordovy rovnoběžky, mají všechny elementární vlastnosti[2]) rovnoběžek geometrie euklidovské (t. j. 1. nemají společného bodu, 2. mají stále stejnou vzdálenost), neleží[3]) však v jediné rovině.

Úlohou následující poznámky jest ukázati na souvislost orthogonální Cliffordovy plochy[4]) a v díle Vriesově[5]) uvažované hyperboloidické polohy úběžnic i normálrovinových úběžnic (Normalebenenfluchtlinie) dvou rovin prostoru čtyřrozměrného na prostoru trojrozměrném.

Společnými kolmicemi dvou Cliffordových rovnoběžek (na př. a, b) v eliptickém prostoru trojrozměrném se vytvoří orthogonální Cliffordova plocha. Rovnoběžky a, b mají nekonečně mnoho společných kolmic. V eliptické geometrii (jejímž základem jest reálný polárný prostor imaginárné plochy druhého řádu) jsou to společné příčky přímek a, b i jejich absolutních polár a', b'. Volíme-li za základní plochu prostoru imaginárnou kouli (poloměru id), pak absolutní polára a' k dané přímce a se sestrojí jako antipolára ke kouli reálné poloměru d, která imaginárnou kouli „ideálně zobrazuje".[6])

Jsou-li tedy a, b Cliffordovy rovnoběžky, tvoří i se svými absolutními polárami a', b' površky téže osnovy na jistém jednoplochém hyperboloidu. V tom případě involuce vzájemně kolmých

[1]) Felix Klein: „Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie", bearbeitet von W. Rosemann. 1928, str. 336.

[2]) Bonola-Liebmann: „Die nichteuklidische Geometrie", str. 194.

[3]) Luigi Bianchi: „Lezioni di Geometria differenziale", Volume II. — Parte II. str. 521. Due rette parallele nel senso di Clifford non sono mai complanari.

[4]) Wolfgang Vogt: „Synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen und der linearen Linienörter des elliptischen Raumes", str. 33.

[5]) H. de Vries: „Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume", str. 66.

[6]) Vincenc Jarolímek: „Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru". Svaz. I., str. 103—104; svaz. III., str. 78.

rovin kol absolutních polár a, a' (jakožto os) vytínají na rovnoběžce b jedinou eliptickou bodovou involuci. Z každého bodu přímky b lze pak vésti společnou příčku (kolmici) přímek (rovnoběžek) a, b, a', b'.

Připomeňme si nyní Vriesovu perspektivu čtyřrozměrného prostoru R_4. Dvě roviny ${}^1\varepsilon$, ${}^2\varepsilon$ v R_4 mají obecně dvě různé (extrémní) odchylky. Víme však, že kriteriem pro to, aby obě roviny svíraly odchylku jedinou, jest hyperboloidická[7]) poloha úběžnic ${}^1q_0$, ${}^2q_0$ i normálrovinových úběžnic ${}^1q_0^n$, ${}^2q_0^n$ (Normalebenenfluchtlinie) obou rovin ${}^1\varepsilon$, ${}^2\varepsilon$ na prostoru trojrozměrném. Úběžnice ${}^1q_0$, ${}^2q_0$ i ${}^1q_0^n$, ${}^2q_0^n$ tvoří pak čtyři površky téže osnovy na jednoplochém hyperboloidu. Přímky osnovy druhé jsou úběžnicemi rovin vzájemně stejných odchylek původních ${}^1\varepsilon$, ${}^2\varepsilon$. Avšak obě úběžnice ${}^1q_0$, ${}^1q_0^n$ jisté roviny ${}^1\varepsilon \equiv C^1q_0$ (jakož i ${}^2q_0$ a ${}^2q_0^n$ roviny ${}^2\varepsilon$) v R_4 mohou býti považovány za antipoláry vzhledem k distanční reálné kouli poloměru d. Sestrojí se tedy právě tak, jako dvě absolutní poláry a, a' dříve zmíněné, v jistém trojrozměrném prostoru eliptickém, o základní imaginárné kouli poloměru id.

Jsou tudíž úběžnice ${}^1q_0$, ${}^1q_0^n$ a ${}^2q_0$, ${}^2q_0^n$ stejně skloněných rovin v čtyřrozměrném prostoru, dvěma páry absolutních polár v jistém trojrozměrném prostoru eliptickém. Majíce hyperboloidickou polohu, připouštějí nekonečně mnoho společných příček a jsou tedy Cliffordovými rovnoběžkami. Přímky druhé osnovy na hyperboloidu jsou jejich společnými kolmicemi a tvoří orthogonální Cliffordovu plochu, z čehož plyne:

Cliffordovy rovnoběžky, tvořící v trojrozměrném eliptickém prostoru (o základní imaginárné kouli) osnovy površek orthogonálního Cliffordova válce, jsou (umístíme-li je ve čtyřrozměrném prostoru euklidovském) úběžnicemi (na trojrozměrném prostoru) rovin, svírajících jediný (vždy však jiný) úhel s každou zvolenou rovinou, jejíž úběžnice jsou rovněž na zmíněné ploše v téže orthogonální Cliffordově osnově.

*

Remarque concernant les parallèles de Clifford.

(Résumé de l'article précédent.)

L'espace fuyant à trois dimensions de l'espace euclidien S_4 à quatre dimensions est un espace elliptique E_3. Considérons dans cet espace E_3 la surface reglée orthogonale de Clifford. Deux droites du même système de cette surface peuvent être envisagées comme droites fuyantes de deux plans dans S_4 dont les deux angles extrêmes sont égaux.

[7]) H. de Vries: „Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume", str. 66.