Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohuslav Hostinský

O inversi

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 2, 137--165

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121204

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O inversi.

Napsal **Bohuslav Hostinský**.

Cílem tohoto článku jest elementární odvození hlavních vlastností inverse (kruhové), která náleží pro svoje četné applikace k velmi důležitým geometrickým transformacím; připojen jest výklad o souvislosti inverse s lineární transformací komplexních čísel. Ohled na známé zobrazování komplexních čísel byl příčinou, proč i do úvah geometrických zaveden t. zv. nekonečně vzdálený bod roviny; neboť obvyklý způsob jednati s číslem nekonečně velikým, ačkoliv jest to vlastně veličina proměnná, neomezeně vzrůstající, pokud možno formálně stejně jako s čísly konečnými, má za důsledek, že se rovina považuje za nositele jen jediného nekonečně vzdáleného bodu *), kterým jest ono číslo zobrazeno.

Definice a hlavní vlastnosti inverse.

V rovině jest dán pevný bod S. K libovolnému bodu M roviny stanovíme příslušný (odvozený, transformovaný) bod M' následujícím způsobem: M' nechť leží na polopaprsku SM tak, aby se součin vzdáleností SM a SM' rovnal dané veličině p^2. Rovnicí

$$SM \,.\, SM' = p^2 \tag{1}$$

jest tedy určena jistá *transformace* všech bodů roviny (prozatím

*) Se stanoviska ryze geometrického se zavádí v rovině nekonečně mnoho takových bodů, které naplňují t. zv. přímku nekonečně vzdálenou. Pak jest názor na inversi poněkud jiný. Viz článek *A. Strnad*: O inversi kruhové (Archiv math. a fys. T. II. str. 124—145).

s výjimkou bodu S, o čemž později), která se nazývá *inversí*; jiný název jest *transformace převratnými průvodiči*. Bod S sluje *středem inverse* a p^2 *mocností inverse*. Jest samozřejmo, že si mohou „originál“ M a jeho „obraz“ M' vyměniti své úlohy: z bodu M' vznikne inversí opět původní bod M. Vyplývá to ostatně ze symmetrie rovnice (1) k písmenám M a M'. Inversí obdržíme k libovolné skupině bodů

$$M, N, P \ldots$$

skupinu bodů odvozených, které značíme čárkovanými písmenami

$$M', N', P' \ldots$$

Celá rovina se tak rozpadá na páry *sdružených* n. *inversních* bodů

$$MM', NN', PP' \ldots;$$

v každém páru se přechází inversí od jednoho bodu k druhému. Tuto vlastnost — že totiž obraz bodu odvozeného splývá s bodem původním — mají i jiné transformace, při kterých se děje přechod od původních bodů k odvozeným zcela jiným způsobem než při inversi. Takové transformace nazýváme *involučními*; inverse jest tedy transformace involuční.

Jedná se nyní o to, vyšetřiti, jak se děje v jednotlivých částech roviny přechod od bodu daného k odvozenému. Zodpovíme nejdříve otázku: kde jsou položeny t. zv. body *samodružné*, které se inversí vůbec nemění? Pár příslušných bodů M, M' jest dle definice na jedné přímce s bodem S a jest tedy nutno a stačí k splynutí jich, aby $SM = SM'$. Tato podmínka spojena s rovnicí (1) dává

$$\overline{SM}^2 = \overline{SM'}^2 = p^2,$$

a tedy

$$SM = SM' = p\,^{*}),$$

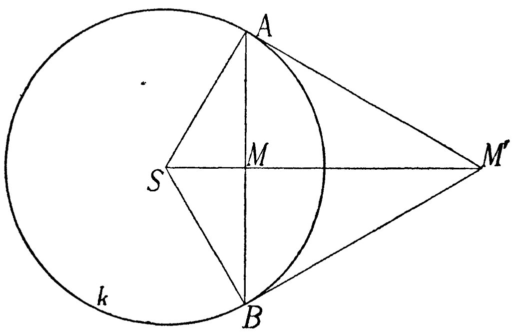
t. j. slovy: každý bod kružnice k opsané poloměrem p kolem středu inverse zůstává na svém místě.

Kružnice k jest tedy *invariantním* (= nepodléhajícím změně) útvarem vůči inversi a nazývá se *základní kružnicí* inverse; jest to geometrické místo *všech* bodů samodružných.

---

*) Volba znamení při odmocňování jest zde úplně vedlejší věcí, neb se jedná jen o číselnou hodnotu vzdálenosti SM.

Body základní kružnice odpovídají případu, kdy oba činitelé na levé straně rovnice (1) se stávají sobě rovnými. Je-li bod M uvnitř kruhu k, jest $SM < p$ a tedy musí býti $SM' > p$, aby byla rovnost (1) zachována, t. j. bod M' jest vně kruhu k; naopak při $SM > p$ (M vně k) jest $SM' < p$ (M' uvnitř k). Kružnicí k dělí se celá rovina na dva obory, které se zaměňují, provedeme-li inversi s hlavní kružnicí k. Na konci tohoto odstavce najde čtenář vysvětlení názvu „zrcadlení na kruhu k“, užívaného někdy pro inversi.



Obr. 1.

Sestrojení bodu M' inversního k danému bodu M provádí se takto: Je-li bod M uvnitř k, vede se v koncovém bodu tětivy BMA kolmé na SM tečna ke kruhu k; ta protíná prodlouženou úsečku SM v bodě M' (obr. 1.). Je-li bod M vně k, vedeme jím tečny ke k; spojnice dotykových bodů protíná SM v bodě M' *).

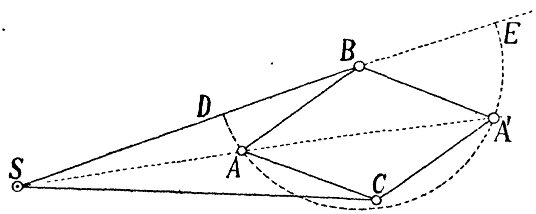
Souvislost současných pohybů dvou bodů M a M' inversí sdružených možno realisovati mechanicky (*Peaucelierův „inverseur“*). Čtyři tuhé tyče o stejné délce l jsou spojeny klouby na svých koncích tak, že tvoří v každé poloze kosočtverec $ABA'C$ (obr. 2.). Z jeho vrcholů B a C vycházejí mimo to dvě tyče o stejné délce L, otáčivé kolem pevného bodu S. Celý přístroj

*) Jiná jednoduchá konstrukce jest udána v poznámce na str. 151.

se může tedy otáčeti kolem bodu S, při čemž lze v jistých mezích bod A od S vzdalovati nebo k S přibližovati. Vedeme-li A podél nějaké křivky, opisuje A' křivku, kterou obdržíme z prvé inversí o středu S a mocnosti $L^2 - l^2$. K důkazu mysleme si rameno SB prodlouženo; kružnice opsaná kolem B poloměrem l prochází body A, A' a protíná SB v D a E. Dle známé planimetrické věty jest

$$SA \,.\, SA' = SD \,.\, SE = (L - l)(L + l) = L^2 - l^2.$$

Stane-li se SM menší než jisté číslo α, musí býti SM' větší než $\frac{p^2}{\alpha}$. Avšak toto číslo se stává libovolně velkým, je-li α dosti blízko nulle; pohybuje-li se M tak, že přichází k S li-



Obr. 2.

bovolně blízko, vzdaluje se M' do nekonečna. Platí patrně i opak: vzdaluje-li se M od S jakýmkoliv způsobem do nekonečna, přichází M' k S libovolně blízko. To se zkrátka vyjadřuje rčením: bodu S přísluší *nekonečně vzdálený bod roviny*; značíme jej písmenou S'. Nemůžeme se předem domnívati, že se s tímto nově zavedeným bodem S' dá jednati ve všech případech tak, jako s nějakým bodem v konečnu položeným. Na př. nemělo by smyslu mluviti o přímce určené bodem S' a nějakým bodem M v konečnu položeným, neboť ta přímka by mohla z bodu M jíti do nekonečna kterýmkoliv směrem. Podstatné jest, že jsme vytkli přidruženost, která vzniká inversí mezi částmi roviny nadmíru vzdálenými od středu S a částmi nadmíru blízkými, ať již v jakémkoli směru. Pojímajíce v právě vyloženém smyslu S a S' za pár sdružených bodů, můžeme o inversi vysloviti tuto větu:

I. Inverse jest transformace pro každý bod roviny bezvýminečně jednoznačná *) *a involuční.*

V dalším naskytne se často příležitost ke zmínkám o nekonečně vzdáleném bodu S', z kterých se teprve jeho zavedení lépe odůvodní; nejdůležitější jest prozatím, že mluvíme o S' — bez ohledu na zvláštní polohu bodu S — jakožto jediném, nekonečně vzdáleném bodu roviny.

Z toho, co bylo dosud řečeno o inversi, jest bezprostředně patrno, že ji můžeme, definovanou původně jako transformaci bodů, považovati též za transformaci křivých čar a částí roviny jimi omezených; dva inversí sdružené útvary jsou v involučním poměru jako pár sdružených bodů. Z jednoznačnosti zobrazení plyne, že v konečnu položená uzavřená čára c neprocházející středem S má za obraz čáru c' téže vlastnosti.

V některých jednoduchých případech ihned poznáme, jak se daná křivka inversí mění. Kruhy se středem v S přejdou v kruhy soustředné. Přímky bodem S vedené se transformují každá sama v sebe, ale ne všecky body jejich stejným způsobem: oba průseky takové přímky se základní kružnicí k odpovídají každý sám sobě, kdežto ostatní body si vyměňují místa.

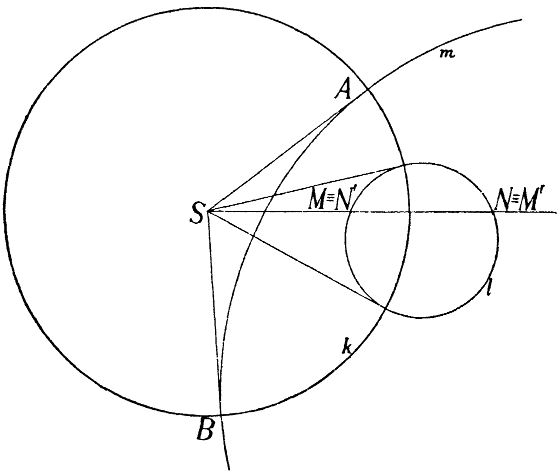
Další útvary, které se samy v sebe transformují, obdržíme následující úvahou: jsou-li M, N průsečíky nějakého kruhu l (obr. 3.) s průvodičem vedeným z bodu S. platí známá rovnice

$$SM \,.\, SN = c.$$

Volme kruh l tak, aby jeho mocnost c v bodě S rovnala se mocnosti p^2 inverse a aby body M, N byly vždy po téže straně bodu S; pak jest p délkou tečny vedené ze středu S inverse ke kruhu l. Srovnání poslední rovnice s rovnicí (1) ukazuje, že pro libovolný směr průvodiče SMN musí býti $M' \equiv N$. Slovy: obraz jednoho z obou průsečíků průvodiče a kruhu l splývá s druhým jich průsečíkem. Oba průsečíky jsou tedy body sdružené, pročež přechází takový kruh inversí sám v sebe; ovšem existují jen dva jeho body (průsečíky se základní kružnicí k), které se inversí vůbec nemění. Poněvadž tečna vedená z bodu S ku l splývá s poloměrem p základního kruhu k,

*) T. j. přiřaďuje každému bodu roviny jen jediný bod sdružený.

svírají tečny v průsečných bodech obou kružnic k a l pravé úhly. Patrně přechází při inversi o základní kružnici k každá kružnice l ku k orthogonální (protínající k v pravém úhlu) sama v sebe; neboť l není ničím jiným charakterisována než předepsanou délkou p tečny vedené z bodu S, t. j. pravoúhelným průsekem s k. Zmíněné již přímky bodem S vedené, které protínají k orthogonálně a transformují se samy v sebe podobně jako kružnice ke k orthogonální, můžeme pokládati za mezní případ těchto. Sestrojíme-li totiž kružnici m, která protíná k



Obr. 3.

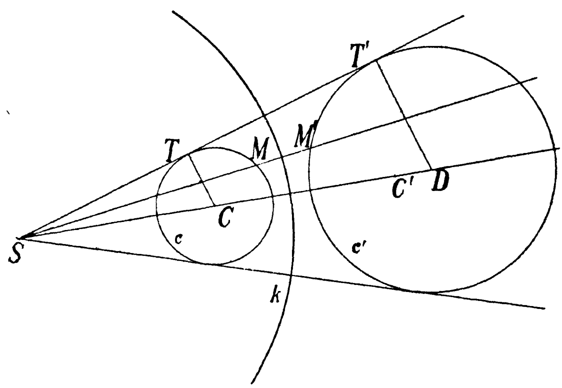
orthogonálně v bodech A a B tak, aby úhel ASB byl blízký 180^0, bude její poloměr veliký (obr. 3.); řečený mezní případ nastává, když za A a B volíme koncové body některého průměru kružnice k.

Přímku vůbec považujeme za kružnici s nekonečně velikým poloměrem; poněvadž jest neomezená, prohlašujeme ji zkrátka za kružnici vedenou nekonečně vzdáleným bodem S' roviny.

Konstatovali jsme, že bod S' neurčuje přímku s nějakým bodem v konečnu položeným. Zůstává však i po zavedení bodu

S' v neomezené platnosti věta, že třemi různými body jest určena jediná kružnice. Je-li jedním z těch bodů S', obdržíme, měníce ostatní dva body, všecky přímky roviny. Proto lze pojímati všecky přímky roviny jako kružnice vedené bodem S'.

Není to pouhá náhoda, že právě úvahy o inversi vedou k takovému pojímání kruhů v obyčejném smyslu toho slova a přímek jakožto útvarů jednoho druhu, které jsou obsaženy v širším pojmu kruhu; neboť mezi všemi kruhy (v tomto širším smyslu) roviny stanoví se inversí souvislost téhož rázu jako mezi jejími body.



Obr. 4.

Abychom to dokázali, rozhodneme nejprve, jaká křivka odpovídá při inversi kruhu libovolně danému; jeho střed označíme C, sdružený bod C' a předpokládáme prozatím, že střed S inverse leží vně toho kruhu (obr. 4.). Na obvodu volíme jistý bod M; k němu jest sdružený bod M'. Platí tedy rovnice

$$SC \cdot SC' = SM \cdot SM' = p^2,$$

neboli

$$SC : SM = SM' : SC'.$$

Proto jest

$$\triangle SCM \sim \triangle SM'C',$$

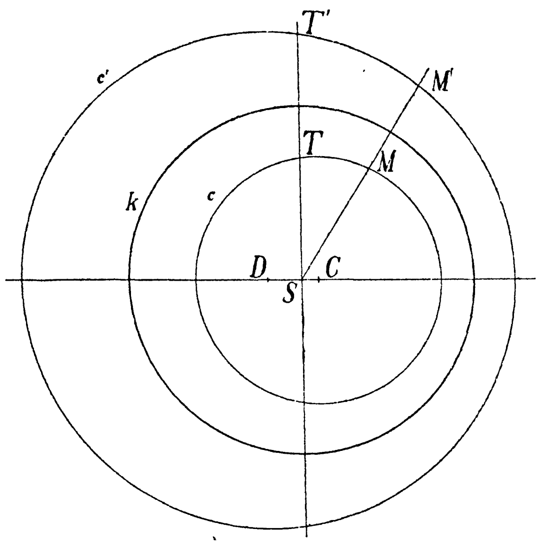
z čehož plyne, že

$$SC : CM = SM' : M'C'. \qquad (2)$$

Pohybuje-li se bod M po dané kružnici, jest levá strana rovnice (2) stálou veličinou; musí se tudíž bod M' tak pohybovati, aby i pravá strana té rovnice

$$SM' : C'M' = \text{stálé veličině.}$$

S a C' jsou pevné body; geometrické místo bodů M' hovících napsané podmínce jest kružnice *). Obrazem dané kruž-



Obr. 5.

nice jest tedy zase kružnice. Středem transformované kružnice jest bod označený písmenem D a nikoliv C' (inversní k středu dané kružnice). Společné vnější tečny obou kružnic se protínají v S; body dotykové T, T' hoví rovnici

$$ST \,.\, ST' = p^2.$$

Je-li dána původní kružnice c tak, že S jest uvnitř (obr. 5.), odvodí se inversní křivka stejným způsobem. Vznikne opět kružnice c'; na místo společné tečny obou kružnic c, c' nastu-

*) To lze jednoduše dokázati užitím analytické geometrie.

puje přímka kolmá v S na jejich centrálu a průsečné body té přímky s oběma kružnicemi splňují rovnici

$$ST \,.\, ST' = p^2.$$

Střed inverse jest v prvém případě (obr. 4.) vnějším, v druhém případě (obr. 5.) vnitřním středem podobnosti kružnice původní a odvozené.

Prochází-li konečně daná kružnice středem S inverse, jest pro každý její bod M očividně $SC = CM$. Z toho plyne dle rovnice (2), že musí býti $SM' = C'M'$ pro každý bod obrazu, kterým jest tedy symmetrála úsečky SC' rovnoběžná s tečnou dané kružnice v bodě S. K tomu vede též následující úvaha.

Nekonečně vzdálený bod S' jest sdružen se středem S inverse. Obraz dané kružnice l, která prochází bodem S, musí obsahovati S' jakožto obraz toho bodu, jest to tedy přímka l' ($=$ kružnice vedená bodem S'). Obsahuje-li daná kružnice mimo bod S též bod S', t. j. je-li dána přímka t vedená bodem S, přejde inversí sama v sebe ($=$ v kružnici vedenou body S' a S), jak bylo už dříve nalezeno. Rovnoběžnost tečny t v bodě S dané kružnice l s přímkou l' odvodí se takto: jediný společný bod útvarů l a t jest jejich bod dotyku S, tedy jediný společný bod transformovaných útvarů l' a t' musí býti S'. Víme však, že l' jest přímka a rovněž tak $t' \equiv t$; nemají-li se tyto přímky jinde protínati než v S', musí býti rovnoběžné. Přihlédneme-li blíže k jejich vztahu, shledáme, že jest nutno pojímati S' jako dotykový bod kružnic (přímek) l' a t; právě tak byl před provedením inverse S dotykovým bodem původních kružnic l a t.

Že skutečně důslednost žádá, aby kterékoliv dvě rovnoběžné přímky byly uznány za kruhy dotýkající se v nekonečně vzdáleném bodu S', vychází na jevo z obrazce vytvořeného dvěma kruhy dotýkajícími se v nějakém bodě C. Centrála nechť protíná oba kruhy mimo C v dalších bodech A a B. Jsou-li body A a B pevné a pohybuje-li se bod C na přímce AB zůstávaje stále dotykovým bodem dvou kružnic vedených body A, resp. B, stávají se poloměry obou těch kružnic libovolně velikými, jen když jest C dosti daleko. Oblouky obou kruhů položené v blízkosti bodů A a B, přibližují se pak libovolně blízko kolmicím vztyčeným v těch bodech na centrálu. To lze úplně vystihnouti rčením, že dotykový bod obou kruhů jest v nekonečnu, přejdou-li naznačeným způsobem ve dvě rovnoběžné přímky. Bez dalšího výkladu jest jasno, že lze vždycky ten přechod zaříditi tak, aby bylo možno říci o kterémkoli páru rovnoběžek, že jsou to kružnice dotýkající se v nekonečně vzdáleném bodu S' roviny.

Zopakujme stručně, jaké páry sdružených geometrických útvarů vznikají inversí:

a) bod a bod,

b) kružnice neprocházející středem inverse a kružnice téže vlastnosti,

c) kružnice procházející středem inverse S a přímka rovnoběžná s tečnou té kružnice v bodě S.

Samy v sebe přecházejí tyto útvary *):

α) všecky jednotlivé body základní kružnice,

β) všecky kružnice orthogonální k hlavní kružnici,

γ) všecky přímky vedené středem inverse.

Zavedení nekonečně vzdáleného bodu S', umožňuje, jak bylo vyloženo, zahrnouti skupiny *b*) a *c*) společným názvem dvojic kruhů a rovněž tak skupiny β) a γ) názvem kruhů orthogonálních k hlavnímu; z toho všeho vyplývá důležitá věta:

II. Inverse jest jednoznačná involuční transformace všech kružnic roviny; mezi nimi jest invariantní předně kružnice hlavní jakožto geom. místo všech samodružných bodů a dále všecky k ní orthogonální.

Další významná vlastnost inverse jest, že úhel, v kterém se protínají dvě libovolné křivky v jistém bodě, rovná se úhlu, který uzavírají transformované křivky v bodě sdruženém. To můžeme předně konstatovati na dvou přímkách a a b, které se protínají v bodě M. Inversí tu dostaneme dva kruhy a' a b', které se protínají v S a M'; S a M' jsou totiž obrazy bodů S' a M, v kterých se protínají dané přímky ($=$ kružnice vedené bodem S').

Ze symmetrie obou kružnic a', b' k jich centrále plyne, že průsečné úhly v S a M' jsou si rovny. Tečny k a' a b' v S vedené jsou však rovnoběžné s a a b; jsou si tedy rovny

*) Zde jsou vytčeny pouze všecky kružnice invariantní. Existují též zcela jiné křivky t. zv. *anallagmatické*, jež se inversí nemění.

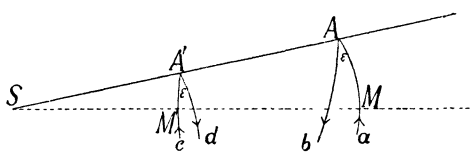
úhly průsečné v S a M. Tím jest rovnost průsečných úhlů v M a M' dokázána. Protínají-li se obecně v bodě M dvě křivky pod jistým úhlem ε, zobrazí se jejich (velmi malé) oblouky, jež splývají v M se svými tečnami m a n, dvěma oblouky, jež v příslušném bodě M' splývají s kružnicemi m' a n'. Úhel průsečný transformovaných křivek v M' jest dle předešlého tedy opět ε.

Ramena příslušných úhlů v M a M' nejsou rovnoběžna, nýbrž symmetricky položena vzhledem ke kolmici vedené k úsečce MM' v jejím rozpolovacím bodě.

Každá transformace, která zachovává velikost průsečných úhlů, nazývá se *isogonálním* (stejnoúhlým) č. *konformním* zobrazením. Tedy:

III. Inverse jest isogonální zobrazení roviny.

Změna smyslu úhlů vysvítá z obr. 6. Pohybuje-li se totiž bod M po křivce a až do bodu A a vzdaluje-li se pak od A



Obr. 6.

po křivce b, jak jest šípy naznačeno, musí se sdružený bod k sdruženému bodu A' přibližovati a pak se vzdalovati (po c a d) ve směru označeném šípy. Neboť kdyby se bod M' pohyboval ve směru opačném, byly by součiny $SM \,.\, SM'$ na a a d vesměs větší než na b a c, což jest vyloučeno.

Mysleme si oblouky a a b spojeny poblíž bodu A nějakou příčnou čarou. Tak povstane křivočarý trojúhelník, jehož jeden vrchol jest v A; pohybuje-li se bod M po jeho obvodě na př. tak, že vnitřek zůstává po levé straně, pohybuje se M' po obvodě transformovaného trojúhelníka ve smyslu opačném. To platí patrně jen tehdy, není-li střed inverse S uvnitř onoho trojúhelníka; je-li S uvnitř, jsou příslušné oběhy souhlasné. Vyslovené pravidlo vztahuje se vůbec k příslušným smyslům oběhů na kterémkoliv páru dvou uzavřených křivek inversně sdružených.

Transformace nějaká sluje *dotykovou*, převádí-li kterékoliv dvě křivky, jež se v nějakém bodě dotýkají, ve dvě křivky dotýkající se v bodě příslušném. Dotýkají-li se dvě křivky v nějakém bodě, znamená to, že úhel sevřený jejich tečnami se rovná nulle. Z věty III. plyne důležitá poučka:

Inverse jest transformace dotyková.

Inverse jest úplně určena, je-li dána základní kružnice co do velikosti i polohy. Tu se přirozeně naskytuje otázka: Může přejíti hlavní kružnice k v přímku, t. j. obdržíme vůbec nějakou inversi, prochází-li hlavní kružnice bodem S'? Ze způsobu, jakým byla inverse definována, není patrno, jaká geometrická transformace jest míněna inversí se „základní přímkou“. Ale jest možno to odvoditi za předpokladu, že i při tomto novém druhu inverse zůstávají v platnosti hlavní věty I. a II. Druhá část věty II. praví, že zůstávají pouze nepohnuty všecky body přímky, jež nyní nastupuje na místo základní kružnice. Sama v sebe přechází pak každá kružnice orthogonální ku k; to se zde očividně týká všech přímek kolmých ku k a všech kružnic s konečným poloměrem, jež mají střed na k. Nyní můžeme již rozhodnouti, jak se zobrazí při takové inversi dva body A, B symmetricky položené ku k. Přímka l je spojující přejde inversí sama v sebe a rovněž tak kružnice m, jež má AB za průměr. A a B jsou jediné průseky obou čar l a m, a zároveň jedinými průseky jich obrazů (poněvadž se tyto od l a m neliší); není možno, aby A a B byly body samodružné (věta II.), ježto leží mimo k, tedy musí býti A a B párem sdružených bodů. Pro úplnost jest na místě podotknouti, že uvedený úsudek spočívá podstatně na platnosti věty I.; neboť jinak by nebylo možno tvrditi, že oba průsečné body transformovaných křivek odpovídají průsečným bodům křivek původních.

Z inverse obdržíme tedy v našem případě „zrcadlení na přímce k“; každý obrazec se transformuje v obrazec symmetrický vzhledem ku k; věta III. jest proto také splněna. Zároveň jest z tohoto speciálního případu inverse patrno, jak asi vznikl název „zrcadlení na kružnici“ pro obyčejnou inversi kruhovou.

Některé úlohy vztahující se k inversi.

Položme si tuto úlohu: Ustanoviti všecky možné inverse, které převádějí dvě dané kružnice k_1, k_2 o středech C_1, C_2 a o poloměrech r_1, r_2 na nové dvě kružnice k'_1, k'_2 tak, že poloměry těchto dvou kružnic se sobě rovnají.

Součin z mocností kruhu původního a transformovaného jest ve středu S hledané inverse roven p^4, je-li p^2 mocností té inverse. Nazveme-li mocnosti daných kruhů t_1^2, t_2^2, mocnosti transformovaných kruhů t'^2_1, t'^2_2 a společný jejich poloměr r, obdržíme předně rovnice

$$t_1^2 \cdot t'^2_1 = p^4, \quad t_2^2 \cdot t'^2_2 = p^4.$$

Poněvadž jest S středem podobnosti pro kružnici původní a transformovanou, platí mimo to rovnice

$$r_1^2 : r^2 = t_1^2 : t'^2_1; \quad r_2^2 : r^2 = t_2^2 : t'^2_2.$$

Srovnáme-li výsledky plynoucí pro r^2 z posledních dvou rovnic a dosadíme-li ve výsledku za t'^2_1 a t'^2_2 z prvních dvou rovnic, vyjde

$$t_1^2 : t_2^2 = r_1 : r_2. \tag{3}$$

Mocnosti považujeme stále za kladná čísla; nyní budeme rozeznávati dva případy:

a) Bod S leží buď vně obou kružnic k_1, k_2 aneb uvnitř obou; pak jsou obě čísla t_1^2, t_2^2 buď čtverce tečen anebo polovičních tětiv kolmých na C_1S, resp. C_2S. Volme *vnější* střed podobnosti O obou kružnic za počátek pravoúhlých souřadnic a jich centrálu C_1C_2 za osu úseček; kladná čísla a_1, a_2, udávající vzdálenost obou středů od O, hoví rovnici

$$a_1 : a_2 = r_1 : r_2. \tag{4}$$

Rovnice (3) nabývá potom tvaru (x, y jsou souřadnice bodu S)

$$a_2[(x - a_1)^2 + y^2 - r_1^2] = a_1[(x - a_2)^2 + y^2 - r_2^2].$$

To jest, jak známo, rovnice kružnice, která má s oběma danými společnou chordálu; po krátké úpravě vyjde

$$x^2 + y^2 = a_1a_2 - r_1r_2.$$

Střed té kružnice jest tedy v O. Poloměr její jest reálný jen tehdy — jak plyne z rovnice (4) — když $a_1 > r_1$, $a_2 > r_2$, t. j. jen když k_1 a k_2 připouštějí vnější společné tečny.

b) Bod S leží uvnitř jedné z daných kružnic a vně druhé; pak jest z čísel t_1^2, t_2^2 jedno čtvercem poloviční tětivy známé vlastnosti a druhé čtvercem tečny. Kladná čísla b_1, b_2 udávající vzdálenost středů $C_1 C_2$ od *vnitřního* středu podobnosti O' obou kružnic vyhovují patrně opět rovnici

$$b_1 : b_2 = r_1 : r_2.$$

Volíme-li nyní O' za počátek souřadnic a $C_1 C_2$ za osu úseček, přechází rovnice (3) v

$$[(x + b_1)^2 + y^2 - r_1^2] b_2 = [r_2^2 - (x - b_2)^2 - y^2] b_1$$

nebo

$$x^2 + y^2 = r_1 r_2 - b_1 b_2.$$

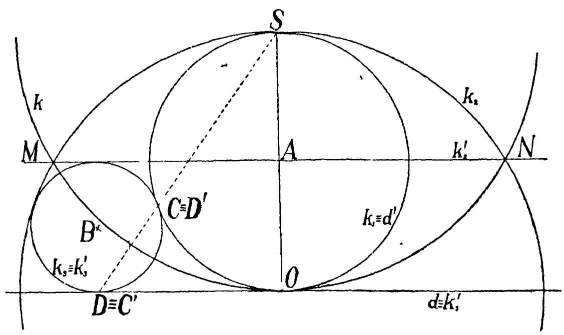
Máme tu zase kružnici, která má s oběma danými společnou chordálu, opsanou kolem jejich vnitřního středu podobnosti. Poloměr její jest reálný jen při $r_1 > b_1$, $r_2 > b_2$, t. j. není-li možno vésti vnitřní společné tečny ku k_1 a k_2.

Rozřešení úlohy jest tedy následující:

Geometrickým místem pro středy hledaných inversí — mocnosti jejich lze voliti libovolně – jsou dvě kružnice opsané kolem obou středů podobnosti daných kružnic, s nimiž mají společnou chordálu. Tento výsledek umožňuje řešení četných úkolů, vzpomeneme-li, že inverse jest transformace dotyková. Sem patří též známé problémy Apolloniovy.

Kdyby se na př. jednalo o sestrojení kružnice k_3, která prochází daným bodem M a dotýká se daných kružnic $k_1 k_2$, proveďme nějakou takovou inversi, jež převádí k_1, k_2 ve dvě shodné kružnice k'_1, k'_2 a bod M v M'. Tím jest úloha velmi zjednodušena: stačí sestrojiti kružnici k'_3, která se dotýká obou shodných kružnic k'_1 a k'_2 probíhajíc bodem M' a provésti opět zmíněnou inversi. Kružnice k'_3 přejde v jinou k_3, která již úkol řeší, poněvadž se dotýká kružnic k_1 a k_2 právě tak jako k'_3 kružnic k'_1 a k'_2 a prochází patrně bodem M.

Jiný příklad: Dána jest kružnice k_1 o průměru a (obr. 7.), jež se dotýká jednak přímky d v bodě O, jednak kružnice k_2 opsané kolem O poloměrem a v bodě S; má se sestrojiti kružnice k_3, která se dotýká všech tří čar k_1, k_2 a d. Provedeme-li inversi, jejíž základní kružnice k má střed v S a poloměr a, přejde k_1 v přímku, která jest rovnoběžná s tečnou vedenou ku k_1 v bodě S; ta přímka musí obsahovati O jakožto bod samodružný, jest to tudíž d; d naopak přechází inversí v k_1. Kružnice k_2 přejde v přímku k'_2, jejíž dva body jest snadno nalézti: jsou to samodružné body M a N (průseky kružnic k a k_2). Přímka k'_2 prochází středem A kružnice k_1 ($\triangle$ OMS jest rovnostranný); kružnice opsaná kolem A poloměrem $\frac{3}{4}a$ protíná symmetrálu



Obr. 7.

úsečky OA ve středu B jisté kružnice k'_3, která se dotýká čar $k_1 \equiv d'$ a $d \equiv k'_1$ v bodech C a D a mimo to i čáry k'_2.

Tato kružnice k'_3 o poloměru $\frac{a}{4}$ řeší danou úlohu. Jest totiž především jisto, že kružnice k_3, která vznikne z k'_3 inversí, úlohu řeší; neboť se dotýká čar d, k_1, k_2, poněvadž se k'_3 dotýká čar k_1, d, k'_2. Avšak body C a D leží s S na jedné přímce (C jest pro k_1 a k'_3 vnitřním středem podobnosti; $AS \parallel DB$), jsou tedy sdružené, poněvadž náleží útvarům k_1, resp. k'_1. Rovnice

$$SC \cdot SD = a^2$$

ukazuje, že k'_3 jest orthogonální ku k, tedy $k_3 \equiv k'_3$.

O transformaci dvou kružnic na dvě kružnice soustředné najde čtenář zmínku v následujícím odstavci.

Poznámka. Sestrojení bodu M' sdruženého s daným bodem M možno provésti také následujícím způsobem: Na paprsku a

spojujícím střed inverse S s daným bodem M vytkněme bod P tak, aby $\overline{SP}^2 = p^2$. Kolmice v bodech M a P na a vztyčené protínají libovolnou přímku b bodem S vedenou v bodech A a B. Hledaný bod M' jest dán průsekem přímky a s rovnoběžkou BM' vedenou ku AP bodem B. Neboť jest zde

$$SM : SP = MA : PB = PA : M'B = SP : SM'$$

a tedy

$$SM \,.\, SM' = \overline{SP}^2 = p^2.$$

Kolmice vztyčená k a v M' protíná b v bodě C, jenž jest středem kružnice vzniklé inversí z kružnice o středu A a poloměru AM. a jest společná tečna obou kružnic.

Analytické vyjádření inverse.

Jedná se o výpočet vztahů mezi pravoúhlými souřadnicemi dvou sdružených bodů. Volme za tím účelem počátek souřadnic ve středu S inverse. Z definice inverse plynou ihned následující dvě rovnice, jsou-li $M(x, y)$ a $M(x', y')$ dva sdružené body a p^2 mocnost inverse:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \,.\, \sqrt{x'^2 + y'^2} = p^2$$

$$x : x' = y : y'.$$

Rozřešení těch rovnic jest

$$x' = \frac{p^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{p^2 y}{x^2 + y^2},$$

nebo (5)

$$x = \frac{p^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{p^2 y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Při řešení vyskytují se odmocniny; bylo by možno všeobecně voliti dvojí znamení, výsledek by měl pak znamení opačné. Že naše úloha vyžaduje právě řešení (5), plyne z toho, že páry hodnot x, x' a y, y' musí míti vždy totéž znamení (dva sdružené body jsou vždy v témže quadrantu).

Je-li dána v rovině nějaká křivka rovnicí mezi proměnnými souřadnicemi x a y, obdržíme rovnici křivky transformované, když do dané rovnice dosadíme za x a y dle vzorců (5).

Abychom vyšetřili, jak se zobrazí libovolně daná kružnice, zvolme spojnici bodu S s jejím středem za osu úseček; pak jest rovnice té kružnice

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2.$$

Inversí přejde tato kružnice v křivku

$$\left(\frac{p^2 x'}{x'^2 + y'^2} - a\right)^2 + \frac{p^4 y'^2}{(x'^2 + y'^2)^2} = r^2,$$

nebo

$$\left(x' - a \cdot \frac{p^2}{a^2 - r^2}\right)^2 + y'^2 = \left(r \cdot \frac{p^2}{a^2 - r^2}\right)^2.$$

t. j. inversí vznikne opět kružnice. Nazveme-li úsečku jejího středu písmenou a', její poloměr r', jest

$$\frac{a}{a'} = \pm \frac{r}{r'}.$$

S jest tudíž středem podobnosti kružnice dané a odvozené; z rovnice odvozené kružnice vyplývá, že čísla a, a' mají společné znamení při $a^2 > r^2$ a znamení různá při $a^2 < r^2$, t. j. S jest vnějším středem podobnosti, leží-li vně dané kružnice a vnitřním, leží-li uvnitř.

Podobným způsobem lze snadno dokázati, že při inversi si vyměňují místo kružnice procházející středem S a přímka v známé poloze k ní atd.

Seznali jsme, že kružnice $k_1\ (a,\ o,\ r)$ *) přechází inversí, která má střed v počátku souřadnic a mocnost p^2, v kružnici $k'_1\left(a \frac{p^2}{a^2 - r^2},\ o,\ r \frac{p^2}{a^2 - r^2}\right)$. Naskytuje se otázka, nejsou-li ještě jiné kružnice, které se transformují inversí na kružnice se středem v bodě $\left(\frac{ap^2}{a^2 - r^2},\ o\right)$. Taková kružnice $k_2\ (\alpha,\ o,\ \varrho)$ — jest samozřejmo, že musí míti střed na ose úseček — přejde inversí v $k'_2\left(\frac{\alpha p^2}{\alpha^2 - \varrho^2},\ o,\ \frac{\varrho p^2}{\alpha^2 - \varrho^2}\right)$. Podmínka, aby kružnice k'_1 a k'_2

*) Tak se značí zkrátka kružnice o poloměru r, jejíž střed má souřadnice a, o.

byly soustředné, jest tedy

$$\frac{a}{a^2 - r^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \varrho^2}. \tag{6}$$

Z této rovnice, nezávislé na p, vyplývá, že k danému kruhu k_1 lze vždycky nalézti nekonečně mnoho kruhů k_2 žádané vlastnosti.

Zajímavější jest úloha obrácená: Nalézti inversi, která dané dva kruhy převádí ve dva kruhy koncentrické. Volme centrálu obou kruhů za osu úseček; hledaný střed inverse měj souřadnice (x, o). V rovnici (6) jsou a, α vzdálenosti středů daných kruhů od středu inverse (i co do znamení), tedy

$$a = b - x, \ \alpha = \beta - x,$$

jsou-li b, β x-ové souřadnice středů obou daných kruhů. Dosadíme-li za a a α do rovnice (6), vyjde pro x rovnice druhého stupně.

Z toho plyne, že všeobecně existují na centrále dvou daných kružnic dva body té vlastnosti, že každá inverse, jež má v některém z nich střed, převádí obě dané kružnice na dvě kružnice koncentrické; může se však státi, že oba ty body splynou v jeden aneb že jsou imaginární.

Inverse v prostoru a stereografická projekce.

Právě tak jako v rovině definuje se inverse v prostoru. Zvolíme libovolný pevný bod S za střed inverse a p^2 za mocnost inverse; bodem sdruženým s M nazýváme takový bod M', který leží na přímce SM s bodem M po téže straně bodu S tak, že platí

$$SM \,.\, SM' = p^2.$$

Prostorová inverse jest tedy jednoznačná a involuční transformace jako inverse rovinná. Koule opsaná poloměrem p kolem středu inverse nazývá se obdobně *základní koulí*; jest geometrickým místem všech bodů samodružných. Bodům v nejbližším okolí středu S odpovídají body nadmíru vzdálené; to vyjadřujeme zkrátka rčením, že bod S jest sdružen s *nekonečně vzdáleným bodem S' prostoru*. Zavedení bodu S' souvisí úzce s pojímáním roviny jako koule tím bodem vedené (s poloměrem nekonečně velikým). Jest zde úplná analogie s větami o inversi rovinné; na místo kružnic nastupují koule v širším smyslu těch slov.

Z důkazu tohoto tvrzení odvodíme nejprve, jak se zobrazí inversí libovolná koule o konečném poloměru, jejíž střed je v daném bodu C a která neprochází bodem S. Za tím účelem považujme v obrazci 4. nebo 5. kružnici c za průsek dané koule s rovinou otáčivou kolem přímky SC. Všecky body M' sdružené s body M kružnice c naplní příslušnou kružnici c'. Otáčí-li se vše kolem přímky SC, vytvoří kružnice c danou kouli; z ní tedy vzniká inversí patrně koule vytvořená otáčením kružnice c'. Dvě koule protínající se tak, že jejich tečné roviny v bodech průsečné kružnice svírají pravé úhly, nazývají se orthogonálními. Jest zcela snadno dokázati, že inversí přechází v sebe každá koule orthogonální ke kouli základní. Sdruženými útvary jsou dále rovina a koule vedená bodem S, v němž má tečnou rovinu rovnoběžnou s rovinou původní atd. Vůbec platí, že *inverse převádí koule v koule.*

Libovolnou kružnici můžeme považovati vždycky za průsek dvou koulí. Inversí obdržíme dvě nové koule; jejich průsečná čára jest obrazem dané kružnice. Tedy: *libovolná kružnice v prostoru mění se inversí opět v kružnici.*

Abychom dokázali větu, že se inversí nemění průsečné úhly libovolných prostorových čar, poznamenejme nejprve, že oba průsečné úhly dvou kružnic protínajících se ve dvou bodech jsou stejně veliké. Nyní jest snadný důkaz věty: dvě přímky m, n svírající v bodě A úhel α zobrazí se dvěma kružnicemi, které svírají v příslušném bodě A' týž úhel α. Zde se jedná toliko o provedení dvou rovinných inversí v rovinách Sm a Sn. Obdržíme dvě kružnice, které se v S protínají a mají zde tečny rovnoběžné s přímkami m, resp. n; průsečný úhel těch kružnic jest tedy α. Bod S jest obrazem nekonečně vzdáleného bodu S' a nikoliv bodu A. Obraz A' tohoto bodu ležící na průvodiči SA jest v druhém průseku těch kružnic; poněvadž jsou průsečné úhly kružnic v S i v A' stejně veliké, jest vyslovená věta dokázána. Pokládáme-li m a n za tečny dvou křivek protínajících se v A, obdržíme touž úvahou, která vedla k důkazu isogonálnosti pro rovinnou inversi, že *inversí vzniká isogonální* *zobrazení prostoru* (dvě čáry, jež se protínají v nějakém bodě prostoru pod jistým úhlem přejdou ve dvě nové čáry, jež se protínají v příslušném bodě pod týmž úhlem).

Po těchto všeobecných větách všimneme si blíže jistého zvláště důležitého zobrazení, které se při inversi vyskytuje. Jedná se o obraz koule, jež má průměr p a prochází středem S inverse o mocnosti p^2. Obdržíme rovinu, která se dané koule dotýká v bodě O protilehlém k S. To plyne bezprostředně z obr. 7., představíme-li si, že se otáčí kolem přímky OS; z inversních útvarů k_1 a d vznikne koule procházející bodem S a její tečná rovina v bodě O. Ostatně jest možno zcela jednoduše dokázati přímo následující větu: Vedeme-li nějakým bodem S dané koule o průměru p libovolnou přímku, která kouli protíná v dalším bodu M, leží bod M', ustanovený na té přímce (s M po téže straně bodu S) rovnicí $SM \,.\, SM' = p^2$, v rovině, která se dotýká dané koule v bodě O k S protilehlém.

Takový přechod od bodů M kulového povrchu k příslušným bodům tečné roviny v O se nazývá *stereografickou projekcí koule z bodu S.*

Poněvadž stereografická projekce není nic jiného než inverse, jest možno ihned uvésti dvě základní vlastnosti:

Stereografickou projekcí přecházejí kruhy koule v kruhy roviny a průsečný úhel dvou křivek na kouli v bodě M rovná se průsečnému úhlu do roviny promítnutých křivek v příslušném bodě M'.

Stereografická projekce řeší tedy následující problém: zhotoviti mapu na př. zeměkoule tak, aby skutečným kruhům odpovídaly kruhy na mapě a aby průsečný úhel libovolných dvou čar vedených na zemském povrchu zůstal na mapě zachován.

Bylo by ovšem zapotřebí celé roviny, aby se na ní celá koule zobrazila, neboť bodu S odpovídá nekonečně vzdálený bod roviny.

V stereografické projekci jest jednoduchý prostředek k orientaci o smyslu různých rčení, která souvisí se zavedením nekonečně vzdáleného bodu S', na př.:

přímky protínající se v bodě A = kružnice protínající se v bodech A a S';

přímky rovnoběžné = kružnice dotýkající se v bodě S' atd.

Přímka promítá se totiž z roviny na kouli v kružnici, která prochází bodem S; z rovnoběžek vzniknou na kouli kružnice o společné tečně v bodu S atd.

Geometrický význam lineární transformace komplexních čísel.

Komplexní číslo

$$z = x + iy$$

(x, y jsou reální čísla, $i = \sqrt{-1}$) zobrazuje se, jak známo, bodem v rovině, jehož pravoúhlé souřadnice jsou x a y; jest obyčejem mluviti o bodu z místo o číslu z i v úvahách čistě mathematických.

V následujícím budeme užívati také t. zv. normálního tvaru komplexních čísel, který obdržíme zavedením polárních souřadnic ϱ a φ.

V rovině komplexních čísel jest absolutní hodnota $|z|$ čísla z dána — vždy kladně čítanou — vzdáleností ϱ bodu z od počátku O souřadnic, tedy

$$|z| = +\sqrt{x^2 + y^2} = \varrho.$$

Úhel φ mezi průvodičem Oz a kladnou osou reálních čísel určený rovnicemi

$$\frac{x}{\varrho} = \cos \varphi, \quad \frac{y}{\varrho} = \sin \varphi$$

nazývá se amplitudou (argumentem) čísla z a čítá se kladně ve směru devadesátistupňového otočení, které by převedlo kladný směr osy Ox do kladného směru osy Oy.

Součet dvou komplexních čísel

$$z_1 = x_1 + iy_1 = \varrho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$
$$z_2 = x_2 + iy_2 = \varrho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

jest číslo

$$z = z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i (y_1 + y_2).$$

Bod, který číslo z představuje, obdržíme t. zv. geometrickým sečtením délek Oz_1 a Oz_2. Jest to známá konstrukce rovnoběžníka sil; Oz_1, Oz_2 jsou složky, Oz výslednice.

Rozdíl dvou komplexních čísel

$$z = z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$$

má za obraz bod, který jest dán geometrickým rozdílem délek Oz_1 a Oz_2. Bod z jest jedním vrcholem rovnoběžníka Ozz_1z_2, jehož úhlopříčna (výslednice) jest Oz_1 a jedna strana (složka) Oz_2.

Součin dvou komplexních čísel

$$\begin{aligned} z = z_1 \,.\, z_2 &= \varrho_1\varrho_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= \varrho_1\varrho_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ &\qquad + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] \\ &= \varrho_1\varrho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

má absolutní hodnotu rovnou součinu absolutních hodnot obou činitelů a amplitudu rovnou součtu jejich amplitud; jest tudíž representován bodem položeným ve vzdálenosti $Oz_1 \,.\, Oz_2$ na paprsku, který svírá s osou Ox úhel $\varphi_1 + \varphi_2$.

Podíl dvou čísel komplexních

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\varrho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} \cdot \frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} \\ &= \frac{\varrho_1}{\varrho_2}[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ &\qquad - \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] \\ &= \frac{\varrho_1}{\varrho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \end{aligned}$$

jest znázorněn bodem, jehož průvodič se rovná podílu $Oz_1 : Oz_2$ a jest uchýlen od osy Ox o úhel $\varphi_1 - \varphi_2$; to plyne ostatně přímo z pravidla o násobení, ježto se při dělení hledá jeden činitel z daného součinu a druhého činitele.

Provésti *lineární transformaci* na dané komplexní číslo z znamená odvoditi nové číslo z' rovnicí

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}. \qquad (7)$$

Při tom jsou a, b, c, d daná komplexní čísla omezená toliko požadavkem, aby nebyla splněna rovnice $ad - bc = 0$; neboť by pak bylo $z' = \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$ a rovnice (7) by neudávala žádnou transformaci čísel z ve vlastním smyslu toho slova.

Rovnici tu lze psáti také v tvaru

$$z = \frac{dz' - b}{-cz' + a}. \tag{8}$$

Vztah mezi čísly z a z' jest tedy vzájemně jednoznačný; od z' ku z se přechází též jistou lineární transformací.

Mění-li se z, mění se z' určitým způsobem; každé křivce, kterou bod z opíše v rovině komplexních čísel, odpovídá určitá křivka jakožto geometrické místo příslušného bodu z'.

Aby názorně vynikl geometrický vztah mezi z a z', myslíme si rovinu komplexních čísel — kterou často nazýváme zkrátka *„rovinou z“* — dvojnásobně: jest jednak „pevná“ rovina, v které jsou čísla $z_1, z_2, \ldots$ znázorněna nepohyblivými body, jednak (na pevné rovině ležící) rovina, jejíž každý bod jest pohyblivý. Pevná rovina slouží pouze k určení poloh těchto bodů v druhé „pohyblivé“ rovině, kterou si prozatím myslíme v klidu; řečené polohy jsou dány čísly $z_1, z_2 \ldots$ stejně jako polohy bodů v rovině pevné.

Změní-li pohyblivé body (hmotně myšlené) dle určitého zákona své polohy, tak že přijdou do poloh $z'_1, z'_2 \ldots$, pravíme, že byla v rovině provedena bodová transformace. Provedeme-li ještě další transformace, přejde tentýž (hmotný) bod do poloh z''_1, z'''_1 atd. Jiný bod, který byl původně v poloze z_2 a pak v z'_2, přijde do poloh z''_2, z'''_2 atd. Písmeny z se stejnými indexy dole označují různé polohy jednoho a téhož bodu; počet provedených transformací jest udán indexy hořejšími.

Uvedeme několik jednoduchých příkladů:

a) $z' = t + z$.

Tato rovnice praví, že novou polohu z' nějakého bodu z v rovině obdržíme, přičteme-li k z nějakou stálou hodnotu t. Dle pravidla o sčítání komplexních čísel to znamená: všecky body se pošinou v jistém směru o danou délku. Považujeme-li na okamžik pohyblivou rovinu za tuhý celek, můžeme říci, že tato transformace představuje *rovnoběžné pošinutí (translaci) roviny z.*

b) $z' = rz$.

Zde obdržíme novou polohu z' bodu z, když průvodič Oz otočíme o amplitudu čísla r a násobíme absolutní hodnotou tohoto čísla. Čáry utvořené body z přejdou patrně při této transformaci na čáry utvořené body z', jež jsou původním čarám podobny. Rovnice ona představuje *točení kolem bodu* $z = 0$ *a zvětšení* *) *všech rozměrů.*

c) $zz' = s = |s| (\cos \sigma + i \sin \sigma)$.

V tomto případě jest předně součin z délek průvodičů $Oz \,.\, Oz'$ roven stálé veličině $|s|$; za druhé jest součet amplitud bodu původního a transformovaného vždy roven stálému úhlu σ, t. j. oba průvodiče svírají s přímkou, jež jest od osy Ox uchýlena o úhel $\frac{\sigma}{2}$ na obou stranách stejné úhly. Přechod z polohy z do z' záleží zde v *překlopení* (kolem přímky $y = x \,.\, tg\, \frac{\sigma}{2}$) celé roviny a v *inversi* (se středem v $z = 0$).

Z geometrické povahy těchto transformací *a) b) c)* plyne, že, provedeme-li je v libovolném pořadu a každou třebas několikráte, vždycky ty body, které původně byly na kružnici, budou opět na jisté kružnici; zobrazení jest mimo to vždy isogonální.

Z následujících čtyř takových jednoduchých transformací

$z' = rz$ (rotace a zvětšení rozměrů)

$z'' = t + z'$ (translace)

$z''' = \frac{s}{z''}$ (překlopení a inverse)

$z^{IV} = z''' + t_1$ (translace)

vyplývá složená transformace (eliminací z', z'', z''')

$$z^{IV} = \frac{s + tt_1 + rt_1 z}{t + rz}. \tag{9}$$

Neurčené dosud veličiny r, s, t, t_1 volme nyní tak, aby se shodovaly pravé strany rovnic (7) a (9). Za tím účelem položíme $rt_1 = a$, $s + tt_1 = b$, $r = c$, $d = t$, t. j.

$$r = c, \; s = b - \frac{ad}{c}, \; t = d, \quad t_1 = \frac{a}{c}.$$

*) To jest míněno algebraicky: při $|r| < 1$ nastává zmenšení, které považujeme algebraicky též za zvětšení.

Geometrický obsah rovnice (7), jež se s (9) stotožňuje, píšeme-li zde z' místo z^{IV}, jest tedy úplně určen.

Lineární transformace převádí kruhy v kruhy a jest isogonální, poněvadž ji lze nahraditi postupným prováděním translací, rotací, inversí a zvětšováním všech rozměrů v útvarech původních.

Totéž platí pro přechod od z' k z (rovnice (8)). Kdyby $c = 0$, máme

$$z' = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d},$$

tedy pouze rotaci, zvětšení rozměrů a translaci.

O dvou rovinných útvarech pravíme, že jsou v *kruhové příbuznosti*, je-li pro libovolný pár příslušných bodů z, z' splněna rovnice (7).

Důležitou vlastností lineární transformace jest zachování dvojpoměru.

Dvojpoměr čtyř bodů z_1, z_2, z_3, z jest výraz

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Symbolicky se značí $(z_1 z_2 z_3 z)$. Provedeme-li lineární transformaci (7), obdržíme z původních bodů nové body z'_1, z'_2, z'_3, z', které mají tentýž dvojpoměr, tedy

$$(z'_1 z'_2 z'_3 z') = (z_1 z_2 z_3 z).$$

Důkaz spočívá v dosazení transformovaných hodnot z'_1, z'_2, z'_3, z' do předloženého dvojpoměru dle rovnice (8). Po jednoduché úpravě obdržíme skutečně

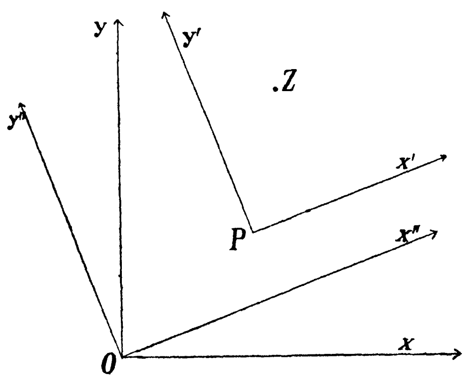
$$\frac{z'_3 - z'_1}{z'_3 - z'_2} : \frac{z' - z'_1}{z' - z'_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z - z_1}{z - z_2}. \tag{10}$$

Tato rovnice liší se od rovnice (7) pouze označením konstant. Vidíme z ní, že k stanovení lineární transformace stačí vytknouti tři páry $z_1 z'_1$, $z_2 z'_2$, $z_3 z'_3$ sdružených bodů; ke každému dalšímu bodu z jest příslušný bod z' jednoznačně určen rovnicí (10).

Dvojpoměr čtyř bodů jest komplexní číslo, které nezávisí na volbě soustavy souřadnic (xy).

O správnosti této věty se přesvědčíme dle předešlého, dokážeme-li, že změnu soustavy souřadnic lze uvésti na lineární transformaci.

Za tím účelem sestrojíme k dané původní soustavě (Oxy) a nové $(Px'y')$ pomocnou soustavu $(Ox''y'')$, jež má s předešlou osy rovnoběžné (obr. 8.). Tentýž bod Z roviny jest v těchto třech soustavách vyjádřen třemi různými komplexními čísly z, z', z''; bod P podobně čísly p, o, p''. Při přechodu z první



Obr. 8.

soustavy do třetí se změní toliko amplituda každého bodu z o jistou stálou veličinu, tedy

$$z'' = r \,.\, z,\ p'' = r \,.\, p,\ |r| = 1.$$

Přechod z třetí soustavy do druhé jest translace

$$z' = z'' - p'' = rz - rp.$$

Z toho plyne $z = \frac{1}{r} \,.\, z' + p$.

Změna soustavy souřadnic není dle toho nic jiného než lineární transformace.

To vše by neplatilo, kdyby nová soustava $(Px'y')$ byla tak volena, že by nebylo možno ji obdržeti z původní (Oxy) pouhým otáčením a posunováním. Ten případ by nastal, kdybychom na př. jen v jedné ose zaměnili směr kladný se záporným; následkem toho by se obrátil směr točení, v kterém se čítají kladně amplitudy (dle definice). Věta o nezávislosti dvojpoměru na soustavě souřadnic platí tedy jen tenkráte, stanovíme-li jeden z obou směrů točení za kladný; soustavy souřadnic, jež se s ním neshodují, jsou vyloučeny.

Že se uvedená definice dvojpoměru kryje s obyčejnou definicí *), jsou-li všecky čtyři body v jedné přímce, seznáme ihned, volíme-li tuto přímku za osu Ox.

Čísla

$$z = x + iy, \quad z' = x' + iy'$$

můžeme znázorniti také párem sdružených bodů (x, y) a (x', y') ve dvou různých rovinách, libovolně v prostoru volených. V tomto pojetí lze vyložiti geometricky lineární transformaci, volíme-li ji ve formě (10) považujíce z_1, z_2, z_3, z'_1, z'_2, z'_3 za konstanty, následovně:

Rovnice (10) vyjadřující zachování dvojpoměru při lineární transformaci určuje kruhovou příbuznost dvou rovin, t. j. vzájemně jednoznačný vztah mezi body z a z' obou rovin té vlastnosti, že kružnicím v jedné z nich odpovídají kružnice v druhé; zobrazení jest isogonální.

Kruhová příbuznost jest úplně stanovena třemi páry sdružených bodů; ke každému dalšímu bodu jedné roviny jest příslušný bod druhé roviny určen zmíněnou rovnicí (10). Soustavy souřadnic, kterých užíváme k početnímu vyjádření bodů, jsou omezeny jedině podmínkou, že se shodují s těmi smysly točení, jež chceme považovati v obou rovinách za souhlasné, jak plyne z dříve učiněné poznámky.

Příklad:

Vyšetřiti kruhovou příbuznost dvou rovin, jsou-li dány v jedné z nich body

$$z_1 = 0, \; z_2 = 1, \; z_3 = \infty$$

a v druhé body k těmto příslušné

$$z'_1 = 1, \; z'_2 = -i, \; z'_3 = 1.$$

---

*) Viz na př.: *Ed. Weyr*: Projektivná geometrie zákl. útvarů prvního řádu str. 12.

Výraz

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = 1 + \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2},$$

jenž se vyskytuje v rovnici (10), rovná se v tomto případě jedné, vzdaluje-li se z_3 do nekonečna jakýmkoliv způsobem; zmíněná rovnice přechází v

$$zz' - z + iz' + i = 0.$$

Zavedeme-li do počtu pravoúhlé souřadnice rovnicemi

$$z = x + iy, \; z' = x' + iy',$$

obdržíme

$$xx' - yy' - x - y' + i(yx' + xy' - y + x' + 1) = 0.$$

K splnění této podmínky jest nutno, aby

$$xx' - yy' - x - y' = 0,$$
$$yx' + xy' - y + x' + 1 = 0.$$

Připojíme-li k těmto dvěma rovnicím rovnici nějaké křivky v rovině z (z'), obdržíme eliminací souřadnic x, y (x', y') rovnici příslušné křivky v rovině z' (z). Tak shledáme, že na př. přímkám

$$y = ax$$

vedeným bodem $x = 0$, $y = 0$ odpovídají v druhé rovině kružnice

$$y'^2 - 2ay' + x'^2 - 1 = 0,$$

které vesměs procházejí dvěma body $x' = \pm 1$, $y' = 0$. Výsledek ten plyne ostatně přímo ze základní vlastnosti kruhové příbuznosti; řečený svazek přímek v první rovině považujeme přirozeně za svazek kružnic vedených body $z_1 = 0$ a $z_3 = \infty$ a odpovídá mu tedy v druhé rovině svazek kružnic vedených body $z'_1 = -1$ a $z'_3 = 1$.

* *
*

Inversi a všeobecnější t. zv. transformaci kvadratickou, jež převádí přímky v kuželosečky, znal již *J. V. Poncelet* (1788—1867), zakladatel moderní projektivní geometrie, a *L. J. Magnus* (1790 až 1861).

Z těch, kteří se první zabývali studiem inverse, uvádím následující:

G. Bellavitis (1803—1880), původce zvláštní početní methody k řešení geometrických problémů, která vyplývá z pojímání úseček v rovině jakožto čísel imaginárních. Jeho spis „Methoda equipollencí" vyšel též v českém překladě.

A. F. Möbius (1790—1868) byl veden k theorii kruhové příbuznosti nejprve geometrickým počtem s délkami a úhly, který se shoduje v podstatě s Bellavitisovou methodou equipollencí; pak odvodil celou theorii úvahami ryze geometrickými.

J. Liouville (1809—1882) upozornil na velmi zajímavý rozdíl mezi rovinnou a prostorovou inversí, který jest v jejich vztahu ku všem možným isogonálním transformacím roviny, resp. prostoru. Roviny jest možno isogonálně zobrazovati rozmanitým způsobem; mohou si odpovídati uzavřené křivky nejrůznějších tvarů. Naproti tomu dokázal Liouville, že mimo inversi — nehledíme-li k případům, kdy transformované útvary jsou původním podobny — žádné jiné isogonální zobrazení celého prostoru neexistuje.

W. Thomson (*Lord Kelvin*, nar. 1824) užil inverse k řešení elektrostatických problémů (methoda elektrických obrazců). Viz na př. v knize prof. *Koláčka*: Elektřina a magnetismus str. 158.

Mosaika.

Zakládám novou rubriku této „Přílohy" našeho Časopisu, věnované úplně Vám, mladí přátelé, kteří ještě studujete na středních školách. Z Vašich řad přicházejí každoročně velmi četní posluchači na universitu naši, aby zde poslouchali také přednášky o fysice buďsi jako medikové, kteří fysiku mají za předmět pomocný, nebo jako filosofové, kteří ji mají za svůj předmět odborný. Ale nejen těmto studujícím, nýbrž Vám všem píši, jsa přesvědčen, že máte sympathie pro fysiku, zejména experimentální. Co vám budu vyprávěti, má býti mosaikou ve smyslu fysikálním. Budou to drobné skizzy, o nichž si přeji, aby byly, jako ty kaménky nebo ta sklíčka různých pěkných barev,