

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Matyáš Lerch
Drobné úvahy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 12 (1883), No. 2, 87--90

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121344>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1883

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

správného pojmání úkazů zakořeňují v myslí naší. Pravíť na př. (č. 1617): Slovo *proud* jest v obecné mluvě tak významné, že můžeme užívající ho vzhledem k elektrickým úkazům s těžší zbavití je obyčejného významu svého a zameziti, aby mysl naše nebyla významem tím předpojata. Chci užívati ho v obyčejném elektrickém smyslu, totiž, bych všeobecně naznačil určitý stav a vztah elektrických sil, o nichž předpokládáme, že postupují.“

Nemenší pozornosti zasluhuje *řada čtrnáctá* (č. 1667—1748), poskytující všeobecné úvahy o silách elektrických a magnetických a o vzájemném jich vztahu. Zde shledáváme se nejprve s pokusy čelíci k tomu, aby se ukázal elektrický anisotropismus krystalinických hmot, t. j. různost specifické induktivní kapacity v různých směrech. Co Faraday tehdy (r. 1838) tušil, tomu dostalo se teprv v novější době stvrzení (Boltzmann). Velice zabavuje Faradaye myšlenka, naléztí pro křivky indukce sílu téhož vztahu, jaký tvoří magnetické síly pro proudokřivky čili pro elektrický proud. Známo jest, že magnetická síla proudu jest *příčná* (transverse), t. j. síla magnetická, která na pól magnetu v kterémkoli bodu působí, jest vždy kolmá ku novině proudem (jejž zde pro jednoduchost považujeme za přímý) a tímto bodem proložené. Podobné magnetické působení hledal Faraday pro čáry indukce; ačkoli je nenalezl, svědčí přece tato myšlenka velmi dobře o jeho širém rozhledu v oboru úkazů elektrických.

(Pokračování.)

Drobné úvahy.

Žákům středních škol píše M. Lerch.

1. O rektifikaci kruhových oblouků.

a) Je známo, že poměr oblouku na kružnici k jejímu poloměru udává velikost úhlu středového v absolutní míře.

Je-li φ tato velikost (která je vždy bezejmenné číslo), platí pro úhly menší než úhel pravý relace

$$\sin \varphi < \varphi < \operatorname{tg} \varphi.$$

Ze známého vzorce $\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$ plyne

$$\begin{aligned} \frac{\sin \varphi}{\varphi} &= \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} = \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{4} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{4}}{\frac{\varphi}{4}} \\ &= \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{4} \cdot \cos \frac{\varphi}{8} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{8}}{\frac{\varphi}{8}} = \dots \\ &= \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{4} \cdot \cos \frac{\varphi}{8} \dots \cos \frac{\varphi}{2^n} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}}, \end{aligned}$$

z čehož obdržíme vzorec

$$\varphi = \sin \varphi \cdot \sec \frac{\varphi}{2} \cdot \sec \frac{\varphi}{4} \cdot \sec \frac{\varphi}{8} \dots \sec \frac{\varphi}{2^n} \cdot \frac{\frac{\varphi}{2^n}}{\sin \frac{\varphi}{2^n}}.$$

Poslední činitel je tím blíže jednici, čím menší je úhel $\frac{\varphi}{2^n}$, t. j. čím větší je n .

b) Máme-li rektifikovati kruhový oblouk AB, jehož střed je v O, spusťme z bodu B na OA kolmici BP, nanesme její délku na OB od bodu O do Q, postavme v koncovém bodě jejím Q kolmici QQ₁ na rameno OB a stanovme její průsek Q₁ s přímkou OA₁ rozpolující daný úhel; v bodě Q₁ postavme nyní kolmici na OQ₁, tato protne pak přímkou OQ₂ půlící úhel Q₁OB v bodě Q₂, v tomto vztýčíme opět kolmici na OQ₂, jež protne přímkou OQ₃ půlící úhel Q₂OB v bodě Q₃ atd. — Přímkou OQ₁, OQ₂, OQ₃ ... blíží čím dále tím více délce oblouku AB.

Neboť jest

$$OQ = BP = OB \cdot \sin \varphi,$$

značí-li φ středový úhel AOB v absolutní míře.

Dále jest dle konstrukce

$$OQ_1 = OQ \cdot \sec \frac{\varphi}{2} = OB \cdot \sin \varphi \cdot \sec \frac{\varphi}{2},$$

$$OQ_2 = OQ_1 \cdot \sec \frac{\varphi}{4} = OB \cdot \sin \varphi \cdot \sec \frac{\varphi}{2} \cdot \sec \frac{\varphi}{4},$$

$$OQ_3 = OQ_2 \cdot \sec \frac{\varphi}{8} = OB \cdot \sin \varphi \cdot \sec \frac{\varphi}{2} \cdot \sec \frac{\varphi}{4} \cdot \sec \frac{\varphi}{8},$$

$$OQ_n = OB \cdot \sin \varphi \cdot \sec \frac{\varphi}{2} \cdot \sec \frac{\varphi}{4} \cdot \sec \frac{\varphi}{8} \dots \sec \frac{\varphi}{2^n}.$$

Porovnáme-li tento vzorec s posledním v *a*), spozorujeme ihned, že tu jest

$$OQ_n = OB \cdot \varphi \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}} = \frac{\sin \frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}} \text{arc AB},$$

což se od oblouku AB tím méně liší, čím menší je úhel $\frac{\varphi}{2^n}$.

2. Řešení rovnic lineárných o dvou neznámých za pomoci čísel pomyslných.

Dány-li jsou rovnice

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2, \end{aligned}$$

násobme druhou z nich pomyslnou jednotkou $i = \sqrt{-1}$, a přičtíme ji k první; i obdržíme:

$$(a_1 + a_2 i) x + (b_1 + b_2 i) y = c_1 + c_2 i,$$

chceme-li nyní ustanoviti x , násobme poslední rovnici číslem $b_1 - b_2 i$, čímž obdržíme

$$\begin{aligned} (a_1 b_1 + a_2 b_2) x + (b_1^2 + b_2^2) y + i \cdot (a_2 b_1 - a_1 b_2) x = \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + i (b_1 c_2 - b_2 c_1), \end{aligned}$$

kterážto rovnice vyžaduje, aby

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2) x = b_1 c_2 - b_2 c_1,$$

z čehož plyne

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Podobně obdržíme y .

Též myšlenky dá se užití při řešení grafickém. Pomyslné číslo $a = a_1 + a_2 i$ vyznačeno je bodem, jehož souřadnice pravoúhlé jsou a_1, a_2 ; podobně čísla $b = b_1 + b_2 i, c = c_1 + c_2 i$.

Násobíme-li rovnici

$$ax + by = c$$

číslem $b' = b_1 - b_2 i$ sdruženým s b bude koeficient při y reálným.

Pro rovnici

$$ab'x + bb'y = cb'$$

můžeme známým způsobem sestrojiti body A, C, jež odpovídají hodnotám $A = ab'$, $C = cb'$, a tedy ji přetvořiti v

$$Ax + bb' \cdot y = C.$$

Poněvadž x, y jsou čísla realná, rozpadá se rovnice tato ve dvě, z nichž jedna je

$$A_2x = C_2,$$

kdež A_2, C_2 značí ryze pomyslnou část hodnot A, C, které se obdrží promítáním bodů A, C do osy čísel pomyslných. Poměr vzdáleností bodů C_2, A_2 od počátku rovná se hledané hodnotě neznámé x .

3. *O zvláštní soustavě souřadnic.*

Budtež $S_1 S_2$ libovolné dva body v rovině, (M) libovolná jimi vedená kružnice v této. Je-li M libovolný bod této kružnice, platí

$$\sphericalangle S_1MS_2 = \pi - (\sphericalangle MS_1S_2 + \sphericalangle MS_2S_1)$$

aneb

$$\sphericalangle MS_1S_2 + \sphericalangle MS_2S_1 = \pi - \sphericalangle S_1MS_2 = \text{const},$$

poněvadž veškeré úhly obvodové nad týmž obloukem sobě se rovnají.

Vezmeme-li na obou stranách cotangenty, obdržíme rovnici

$$\frac{\cot S_1 \cdot \cot S_2 - 1}{\cot S_2 + \cot S_1} = -\cot M.$$

Značíme-li $\cot S_1 = x_1$, $\cot S_2 = x_2$, $\cot M = k$, obdržíme odtud

$$x_1x_2 + k(x_1 + x_2) - 1 = 0,$$

kterážto rovnice velmi jednoduchá udává podmínku, kdy proměnný bod M, stanovený cotangentami x_1, x_2 úhlů sevřených paprsky S_1M, S_2M se směrem S_1S_2, S_2S_1 , naplňuje kružnici.

Pan *Walton* nazývá tyto cotangenty biangularními souřadnicemi bodu M. Mnohé křivky mají v soustavě této velmi jednoduché rovnice, přímce pak náleží rovnice téhož tvaru jako v soustavě Descartesově.

Jak znějí rovnice elipsy a hyperboly, položíme-li body S_1 a S_2 do ohnisek?