

J. M. Horák

O pojmu "všechny" v teorii množin

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 256--259

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121376>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1928

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O pojmu „všechny“ v teorii množin.

Napsal J. M. Horák.

Ve své práci „O antinomiích theorie množin“ (Rozpravy čes. akademie II tř. r. XXXIV, č. 15) ukázal jsem, že známé antinomie zahrnuté ve formulaci Grelling-Nelsonově vyplývají z běžné definice pojmu „všechny“. Mysleme si totiž pojem „všechny objekty vlastnosti E “ a definujme pomocí tohoto pojmu jiný objekt A . Ptáme se nyní, zda-li tento nový objekt A , o němž předpokládáme, že má rovněž vlastnost E , je zahrnut v rozsahu pojmu „všech objektů vlastnosti E “. Přijmeme-li odpověď kladnou, pak je objekt A definován per orbem, neboť je definován pomocí „všech objektů vlastnosti E “, mezi něž sám náleží. Odpověď záporná nás však uvádí ve spor s definicí pojmu „všechny objekty vlastnosti E “, podle níž každý objekt s vlastností E je zahrnut v jeho rozsahu. Jest viděti, že pro teorii množin tento jinak vyhovující pojem „všechny“ nestačí; byl definován jen s ohledem na nejjednodušší případy, kdy nebyly uvažovány objekty, které by mohly býti definovány pomocí jeho samého. Ve všech případech, kdy nepřicházejí v úvahu takové objekty (a také jen v těchto případech), je logicky zcela bezzávadný. Pro případy složitější však potřebujeme přesnější definice, nestačí převzít definici starou. V této okolnosti leží jádro všech antinomií, jež jsou jen důsledkem tohoto logicky chybného převzetí definice pojmu „všechny“ i pro případy, jež zřejmě při této definici nebyly uvažovány. Účelem této práce jest naznačiti úvahy, jež vedou k uspokojivé definici pojmu „všechny“ a doplniti takto práci výše citovanou, v níž jsem jen stručně objasnil logicky opravený pojem „všechny“.

Východiskem nám při tom bude následující *axiom (postupných definicí)*: chci-li definovati nějaký objekt, pak musím ty objekty, pomocí jichž má býti definován, předpokládati jako definované.

Z toho plyne ihned, že všechny objekty nelze definovati současně; abychom zamezili nedorozumění, řekněme logicky současně nebo v témže logickém okamžiku. Logicky současně nebo v témže log. okamžiku jsou definovatelný dva objekty jen tehdy, když definice jednoho nepředpokládá definici druhého.

Tento axiom sám vlastně řeší všechny antinomie a podává

základnu, na níž je možno vybudovati bezespornou definici množin D , t. j. množin „všech objektů vlastnosti E “.

Použijme toho nyní na pojem „všechny objekty vlastnosti E “. V souhlase s uvedeným axiomem bude rozsah tohoto pojmu obsahovati každý a jen ten objekt vlastnosti E , který předpokládáme jako definovaný v okamžiku definice pojmu „všechny“. Tím je vysloven logický požadavek tohoto pojmu, ale není tím ještě podána jeho definice. K tomu použijeme postupu, který nazvu *procesem neurčené definice*.

Buďtež dány jisté základní objekty, z nichž definováním získáváme bez omezení objekty další. Mysleme si, že bychom fixovali jistý logický okamžik ustanovením, že v tomto okamžiku má být definován nějaký dosud blíže neurčený objekt M ; není tedy stanoveno, co má být definováno, nýbrž jenom, že vůbec něco má být definováno. Speciální volba objektu M není ničím omezena; z toho plyne, že v tomto okamžiku musíme předpokládati každý objekt definovatelný před tímto okamžikem za definovaný, protože objekt M zůstává neurčen a mohl by tedy být definován pomocí kteréhokoli objektu definovatelného před tímto log. okamžikem. Nazveme tento log. okamžik okamžikem neurčené definice.

Když nyní definujeme nějakým způsobem objekt M v okamžiku neurčené definice, pak buď je obsažen mezi objekty již definovanými, nebo je to objekt nový. Pomocí tohoto nového objektu a ostatních již dříve definovaných můžeme definovati další nové objekty bez omezení a fixovati nový okamžik neurčené definice nejbližší následující. Existuje tedy nekonečně mnoho různých po sobě jdoucích okamžiků n. d., z nichž každý je stanoven mezi ostatními tím, které okamžiky neurčené definice jsou v onom okamžiku již předpokládány. Okamžik n. d., který nepředpokládá žádný předcházející proces n. d., bude prvním okamžikem n. d. a opatříme jej indexem 1 . Po něm následuje druhý, třetí atd. bez omezení, tedy obecně α -tý, kde α je transfinitní pořadové číslo (Ordnungszahl). Objekty, definovatelné až do jistého okamžiku neurč. def., nazvu *objekty dosud definované*, zkráceně d. d. Je-li třeba, připojíme ke zkratce index příslušného okamžiku n. d., tedy objekty d. d. α .

V libovolném okamžiku neurčené definice mohou nyní definovati pojem „všechny objekty d. d.“; do rozsahu tohoto pojmu bude náležeti každý objekt d. d. a jen takový objekt. Tím je rozsah pojmu „všechny d. d.“ jednoznačně určen. Můžeme pak definovati také množinu D_α , totiž množinu „všech objektů d. d. α , jež mají vlastnost E “.

Rozhodnutí, zda jistý daný objekt náleží mezi objekty d. d., vyžaduje speciální úvahy pro každý jednotlivý případ. Příklad takových úvah poskytuje moje svrchu citovaná práce o antinomích.

Sur la notion de „tous“ dans la théorie des ensembles.

(Extrait de l'article précédent.)

L'article précédent contient des raisonnements qui conduisent à la définition précise de la notion de „tous“ (voir aussi le travail du même auteur: „Sur les antinomies de la théorie des ensembles“ Bulletin international de l'Académie des sciences de Bohême 26, 1926). On part de l'axiome suivant (*axiome de définitions successives*): Si l'on définit un objet, il faut supposer que les objets dont la définition on emploie soient déjà définis. Dès lors, il est clair que l'on ne peut pas définir tous les objets simultanément, ou dans le même moment logique. Certains objets sont définissables seulement après la définition d'autres objets.

La notion de „tous“ ne peut comprendre que les objets que l'on suppose définis au moment de la définition de la notion de „tous“. Par là est seulement exprimé le postulat logique de cette notion et non sa définition elle-même. Un procès spécial, que l'on peut nommer *procès de définition indéterminée*, nous met en état de donner cette définition.

Soient donnés des objets fondamentaux, on en déduit d'autres par définition. Or, on peut fixer un certain moment logique par l'énoncé suivant: en ce moment doit être défini un objet M que l'on laisse préalablement indéterminé. L'objet M est arbitraire; on en conclut que l'on doit, en ce moment, supposer défini chaque objet définissable avant ce moment, car l'objet M pourrait dépendre de chaque objet de cette espèce. Par cela, le moment logique est caractérisé; nous l'appelons le moment de la définition indéterminée. Les objets dont la définition est supposée faite en un moment de d. i. sont les mêmes que l'on doit supposer définis pour pouvoir définir la notion de „tous“. On peut donc définir, au moment de d. i., la notion de tous les objets définissables jusqu'à ce moment; pour abrégé, nous désignerons la notion de tous les objets par j. d.

Or, au moyen de cette notion, on peut définir d'objets nouveaux et, par conséquent, fixer un autre moment de définition indéterminée qui suit immédiatement le moment de d. i. précédent. Et ainsi de suite. Donc, on a un nombre indéfini de ces moments qui se succèdent. Il existe évidemment le moment de d. i. premier qui ne suppose aucun moment de d. i. précédent, puis le deuxième etc. puis le α -ième, où α désigne un nombre ordinal transfini.

Il est clair ce qu'on doit entendre par les expressions suivantes: tous les objets j. d. . . tous les objets j. d. α etc. où l'on désigne par l'indice le moment de d. i. convenable. Mais, dans la plupart des cas, on peut supprimer cet indice. Or, on peut définir l'ensemble de tous les objets j. d. α qui contient, conformément aux considérations précédentes, chaque objet définissable

avant le moment de définition de l'ensemble et qui ne contient que ces objets; par conséquent, cet ensemble n'impliquera pas d'antinomies connues.

Le fait qu'un objet donné appartient aux objets j. d. ne peut être déterminé que par un examen spécial de chaque cas particulier. On trouve des exemples de tels examens dans le travail sur les antinomies, cité plus haut.