Vincenc Jarolímek

# Společné body a tečny dvou kuželoseček nerýsovaných

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 44 (1915), No. 4-5, 378--382

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121501

Jak mnoho času mé povolání mi zabírá — o tom se nemusím snad šířiti — a úkol, jenž na mne vznášíte vyžaduje mnoho a mnoho času. Já práce Helmholtzovy, pokud v obor fysiky spadají, tak dalece znám, ale odtud až k článku, který o vědecké činnosti jeho pěkný přehled podati má, jest předc jen daleká cesta.

Myslím, že by „Živě" bylo sotva poslouženo — najmě za této příležitosti — článkem, který by pro nedostatek času nebyl leč suchopárným výpočtem práci Helmholtzových, prošpikovaný obvyklými frásemi o jeho zásluhách atd.

Helmholtz pracoval tak dlouho a s takovým úspěchem, že jest těžko se vmysleti do doby a do stavu vědy v tom čase, kdy on se jal ji spracovati. Takové historické studia jsem ani konati času neměl, a pakli bych je konati měl — potřeboval bych k tomu půl roku. Nemějte mi tedy za zlé, že ač nerád, Vám po vůli býti nemohu — beztoho se necítím dosti zdravým.

Vám oddaný

Dr. Koláček.

---

# Společné body a tečny dvou kuželoseček nerýsovaných.

Podal dvorní rada prof. Vinc. Jarolímek.

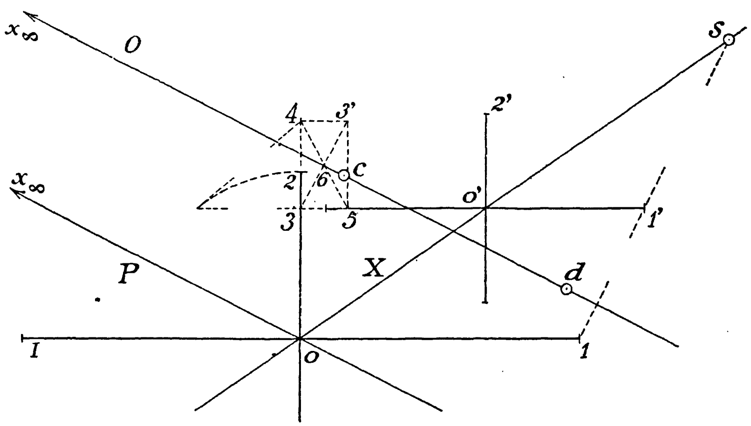
Speciální případ tohoto problému, kdy obě kuželosečky mají jednu osu na téže přímce, řešil jsem ve svém pojednání „O prvcích dvojpřímkových, jež obsaženy jsou v symmetrickém svazku kuželoseček" již roku 1898[1]), případ pak obecný, kdy

[1]) V »Rozpravách II. třídy České Akademie věd« atd. roč. VII.; otištěno též v mém spise »Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru«, svazek III., str. 62. Lituji, že toto řešení nedošlo povšimnutí. Různé konstrukce, jež podalo několik českých geometrů v »Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky« roku 1908 a 1913, mimo to inž. Rogel ve »Věstníku Král. č. společnosti nauk« r. 1913, nasvědčují tomu, že pp. řešitelům moje jednoduchá methoda, uveřejněná o 10—15 let dříve, známa nebyla. Methoda

kuželosečky mají vzájemnou polohu jakoukoliv, ve Věstníku Král. české společnosti nauk roku 1915, čímž úloha jest vyřízena definitivně.

Dodatkem chci ještě ukázati, jak lze nejvýhodněji řešiti případ, kdy dané kuželosečky jsou *homothetické.*

1. Buďtež nejprve dány dvě ellipsy: $E$ poloosami $\overline{o1}$, $\overline{o2}$ (obr. 1.), $E'$ poloosami $\overline{o'1'} \parallel \overline{o1}$, $\overline{o'2'}$ a to tak, aby $\overline{1'2'} \parallel \overline{12}$. Na spojnici středů $\overline{oo'}$ leží oba body podobnosti, vnější v průsečíku $(\overline{oo'}, \overline{11'}) \equiv s$, vnitřní $(\overline{oo'}, \overline{1'1}) \equiv s'$ (z obrazce vypuštěn).




Obr. 1.

Body $s$, $s'$ jsou zároveň kollineační středy obou křivek, a průsečíky vnějších, resp. vnitřních společných tečen ellips $E$, $E'$ (konstrukce tečen z bodu $s$ ku $E$ elementárná). Pokud se týče společných bodů, jsou dva z nich, $a$, $b$, v našem případě imaginárné na přímce úběžné $O_\infty$, neboť homothetické kuželosečky mají asymptoty (zde imag.) navzájem rovnoběžné. Ostatní dva

tato záleží prostě v tom, že se sestrojí společný polárný trojúhelník daných kuželoseček, po té

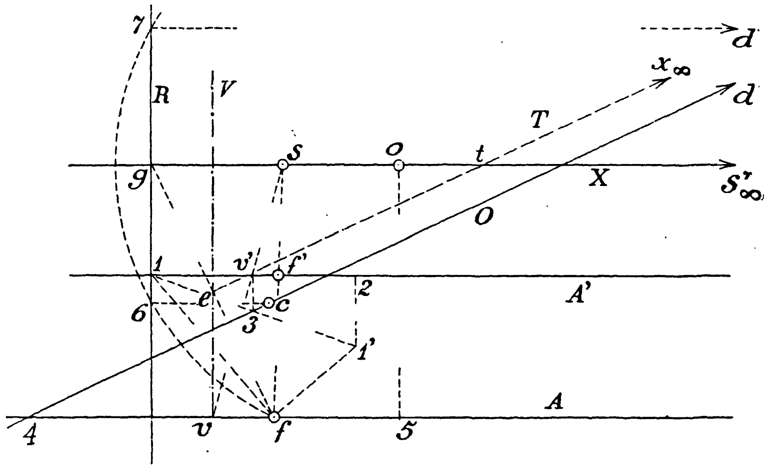
| | |
|---|---|
| dvě reálné kollineační osy jejich, jež procházejí jedním vrcholem trojúhelníka, a průsečíky těchto os s jednou křivkou danou. | dva reálné kollineační středy jejich, jež leží na jedné straně trojúhelníka, a tečny z těchto středů k jedné křivce dané. |

společné body ellips $c$, $d$ leží na druhé kollineační ose $O$, již sestrojíme takto. Přímka $\overline{ss'} \equiv \overline{oo'} \equiv X$ je společná polára ellips pro pól $x_\infty$, k němuž směřuje průměr $P$ v ellipse $E$ ku $X$ sdružený. $X$ je tedy jedna strana společného polárného trojúhelníka ellips $E$, $E'$, protější pak vrchol $x_\infty$ jest v úběžném bodě průměru $P$ (ostatní dva vrcholy jeho $y$, $z$ leží na $X$, jsou však pomyslny, pokud průsečíky $c$, $d$ jsou reálny). Vrcholem $x_\infty$ procházejí obě kollineační osy $O$, $O'$, bude tedy $O \parallel P$. Zvolme kdekoli bod $3$ a sestrojme k němu sdružený dle $E$, $E'$ pól $3'$. Budiž třebas bod $3$ v průsečíku os $\overline{2o}$, $\overline{1'o'}$; polára ellipsy $E$ pro pól $3$ jest $\overline{43'} \perp \overline{2o}$, polára ellipsy $E'$ pro týž pól $\overline{53'} \perp \overline{1'o'}$; průsečík obou polár dá $3'$. Sdružené póly $33'$, ... promítají se, jak známo, z vrcholu polárného trojúhelníka $x_\infty$ involučním svazkem (zde osnovou) paprskovým, jehož samodružné paprsky $O_\infty$, $O$ jsou kollineačními osami ellips. Ježto však $O_\infty$ je v nekonečnu, je involuce ona symmetrická, t. j. každá družina její je souměrna dle $O$. Učiňme tedy $\overline{36} = \overline{63'}$ a bodem $6$ veďme osu $O \parallel P$. Průsečíky přímky $O$ s ellipsou $E$ (nebo $E'$) jsou žádané společné reálné body $c$, $d$ daných ellips. — Průměr $P$ sdružený ku $X$, průsečíky přímky $O$ s ellipsou $E$ a tečny z bodu $s$ k ellipse $E$ lze sestrojiti známým způsobem pomocí affinity ellipsy $E$ s kružnicí opsanou poloměrem $\overline{o1}$. V našem případě jsou vnitřní tečny (z bodu $s'$) daných ellips pomyslné.

2. Jsou-li dané křivky hyperboly $H$, $H'$, jest postup konstrukce celkem týž, avšak affinita hyperboly $H$ s kružnicí je zde nemožna. Sestrojíme tedy průměr $P$ sdružený ku $X$ čtvrtým harmonickým paprskem ku $MNX$, jsou-li $M$, $N$ asymptoty hyperboly $H$. Průsečíky $c$, $d$ osy kollineační $O$ s hyperbolou $H$ (nerýsovanou) obdržíme, sestrojíme-li pól $o$ ku poláře $O$, z bodu $o$ tečny k hyperbole $H$ (známá konstrukce elementárná) a dotyčné body $c$, $d$. Tyto body mohou být také pomyslné, ale ostatní dva průsečíky hyperbol $a$, $b$ jsou vždy reálné, totiž v úběžných bodech asymptot, jež jsou navzájem rovnoběžny.

3. Posléze buďtež dané křivky paraboly $P$, $P'$. Paraboly jsou si vesměs geometricky podobny; jsou-li tedy osy parabol rovnoběžny, $A \parallel A'$ (obr. 2.), jsou křivky ty homothetické. Vrcholy jejich buďtež $v$, $v'$, ohniska $f$, $f'$. Spojnice $\overline{vv'}$, $\overline{ff'}$ protnou se ve vnějším bodě podobnosti č. středu kollineačním $s$; vnitřní bod

podobnosti $s'_\infty$ jest ve společném bodě os parabol $a \equiv b$, v němž tyto křivky dotýkají se navzájem i přímky úběžné. Jest tedy spojnice $\overline{ss'_\infty} \equiv X \| A$ jednou stranou společného polárného trojúhelníka; protější vrchol $x_\infty$ je v nekonečnu na průměru sdruženém k průměru $X$, čili na tečně $T$ paraboly $P$ v bodě $t$, v němž $X$ parabolu seče. Vyhledejme tedy průsečík $(XR) \equiv g$ (kdež $R$ je řídící přímka paraboly $P$), spojme $\overline{gf}$, učiňme $\overline{ge} = \overline{ef}$ ($e$ na tečně vrcholové $V$), $eT \perp \overline{gf}$. Osa kollineační bude tedy $O \| T$. Abychom ji sestrojili, stanovme zase dva póly $1$, $1'$ sdru-




Obr. 2.

žené dle $P$, $P'$. Učiníme-li na př. $(A'R) \equiv 1$, bude jeho polára $\overline{f1'} \perp \overline{1f}$ vzhledem ku parabole $P$ (protože bod $1$ leží na řídící přímce $R$), a polára $\overline{21'} \perp A'$ ($\overline{v'2} = \overline{1v'}$) ku parabole $P'$. Průsečík obou polár $1'$ je sdružen k bodu $1$. Z bodu $x_\infty$ promítá se opět involuce $11'$, . . . involuční osnovou paprskovou ($\| O$) symmetrickou; rozpolme tedy úsečku $\overline{11'}$ bodem $3$ a veďme jím osu kollineační $O \| T$. Pozůstává toliko stanoviti průsečíky $c$, $d$ osy $O$ s parabolou $P$ (nebo $P'$). K tomu konci vyšetřme pól $o$ ku poláře $O$: pólu $4$ přísluší polára $\overline{5o} \perp A$ ($\overline{v5} = \overline{4v}$), pólu $x8$ polára $X$, pročež průsečík obou polár $o$ je pólem poláry $O$. Tečny vedené pólem $o$ ku parabole $P$ protínají $O$ v bodech dotyčných $c$, $d$. Opišme tedy poloměrem $\overline{of}$ kružnici, která protne řídící přímku $R$ v bodech $6$, $7$, a těmito veďme rovnoběžky ku $A$; tyto pak protnou kollineační osu $O$ v bodech $c$, $d$, jež jsou společnými body daných parabol; ostatní dva $a \equiv b$ jsou v nekonečnu na $A \parallel A'$. Posléze tečny sestrojené z bodu $s$ ku parabole $P$ (známá konstrukce elementárná) jsou zároveň tečnami paraboly $P'$; vnitřní tečny společné v našem případě splývají s přímkou úběžnou.

---

# O kuželosečkách na jisté ploše sborcené.

Napsal **Vladimír Mašek**, assistent české techniky v Brně.

1. V pojednání „O ploše sborcené naplněné osami křivosti příslušnými některému společnému bodu určité soustavy šroubovic“, uveřejněném v Rozpravách České akademie roč. XXIV., uvažovali jsme plochu sborcenou $S^3$ určenou následovně: Dán jest svazek rotačních válců procházejících přímkami $a$ a $b$ kolmými k průmětně $\pi$. (Obr. 1.) Průmětna $\pi$ nechť protíná tento svazek rotačních válců ve svazku kružnic o základních bodech $A_1$ a $B_1$. Na každém z těchto válců vytkněme šroubovici levou vycházející z bodu $A_1$ o dané, všem šroubovicím společné, výšce závitu $v$. Osy křivosti těchto šroubovic příslušné bodu $A_1$ naplňují pak plochu $S^3$.

Uveďme některé vlastnosti plochy $S^3$, jež jsou ve výše zmíněném pojednání odvozeny. Bylo dokázáno, že plocha $S^3$ jest sborcenou plochou 3. řádu. Rovina nekonečně vzdálená protíná plochu v přímce $u_\infty$, jež jest dána směrem roviny nárysné a v kuželosečce $\varepsilon_\infty$. Označme $\check{s}$ šroubovici ležící na rotačním válci procházejícím nejmenší kružnicí $k_1$ daného svazku kružnic a budiž bod $V$ vrcholem řídícího kužele této šroubovice proloženým kružnicí $k_1$. Průmětna $\pi$ protíná plochu $S^3$ v *Sluse*-ově konchoidě $c_3$, jejímž dvojným bodem jest bod $A_1$ a asymptotou symetrála $m_1$ bodů $A_1$ a $B_1$. Bod $Q_1$ křivky $c_3$ ležící na spojnici $\overline{A_1B_1}$ sestrojíme na základě relace $\overline{A_1V_1} \cdot \overline{V_1Q_1} = v_0^2$, značí-li $v_0$ redukovanou výšku závitu daných šroubovic. Dále bylo odvozeno, že řídícím kuželem plochy $S^3$ jest kužel orthogonálný protínající průmětnu $\pi$ v kružnici. Označme $I$ a $K_1$ průsečíky přímky $m_1$