

Eugen Bunickij

Poznámka k článku „O integraci úplných diferenciálů“

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 72 (1947), No. 3, 131--136

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121554>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1947

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## Poznámka k článku „O integraci úplných diferenciálů“.<sup>1)</sup>

Evžen Buniekij, Praha.

(Došlo dne 20. října 1946.)

1. V tomto článku jde o funkce reálných proměnných, u nichž předpokládáme spojitost parciálních derivací těch řádů, jež se v dalším vyskytují. Je-li  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  homogenní funkce stupně  $k$ -tého, je, jak známo,

$$x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = k \varphi(x_1, \dots, x_n). \quad (1)$$

Budiž nyní

$$dU = \sum_{i=1}^n X_i(x_1, \dots, x_n) dx_i, \quad (2)$$

totálním diferencíalem (nutnou a postačující podmínkou je, jak známo,

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}, \quad (3)$$

pro  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), a předpokládejme, že funkce  $X_i$  jsou homogenní funkce stupně  $k$ -tého.

Potom jest (sčítá se od 1 do  $n$ )

$$\begin{aligned} d(\sum_i X_i x_i) &= \sum_i X_i dx_i + \sum_i x_i dX_i, \\ \sum_i x_i dX_i &= \sum_i \left( \sum_v x_i \frac{\partial X_i}{\partial x_v} dx_v \right) = \sum_v \left( \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i} x_i \right) dx_v = k \sum_v X_v dx_v, \end{aligned}$$

a tedy

$$d(\sum_i X_i x_i) = (k + 1) \sum_i X_i dx_i, \quad (4)$$

t. j.

$$d(\sum_i X_i x_i) = (k + 1) dU.$$

<sup>1)</sup> Viz Časopis 57 (1928), 87-94.

Je-li tedy  $k \neq -1$ , je funkce  $U$  z rovnice (2) dána výrazem

$$U = \frac{1}{k+1} (X_1 x_1 + \dots + X_n x_n) + C, \quad (5)$$

kde  $C$  je konstanta. To je jednoduchý vzorec pro integrování úplného diferenciálu (2), platný pro  $k \neq -1$ , který byl odvozen v citovaném článku. V tomto článku se soustředíme na zbývající případ  $k = -1$ . Buďte tedy  $X_i$  v (2) homogenní funkce stupně  $-1$ , takže po substituci

$$u_\nu = \frac{x_\nu}{x_1} \quad (\nu = 2, 3, \dots, n) \quad (6)$$

jest

$$X_i = \frac{1}{x_1} \varphi_i(u_2, \dots, u_n) \quad (i = 1, \dots, n); \quad (7)$$

podle (4) je pak nyní

$$\sum_{i=1}^n X_i x_i = A \quad (A \text{ konstanta}). \quad (8)$$

Odtud

$$X_1 = \frac{A}{x_1} - \frac{1}{x_1^2} \sum_{\nu=2}^n \varphi_\nu(u_2, \dots, u_n) x_\nu,$$

takže pravou stranu v (2) lze psáti ve tvaru

$$A \frac{dx_1}{x_1} + \sum_{\nu=2}^n \varphi_\nu(u_2, \dots, u_n) \frac{x_1 dx_\nu - x_\nu dx_1}{x_1^2},$$

načež (viz ještě (6) a (7)) lze (2) psáti ve tvaru

$$dU = d(A \log |x_1|) + \sum_{\nu=2}^n \varphi_\nu(u_2, \dots, u_n) du_\nu. \quad (9)$$

Součet

$$\sum_{\nu=2}^n \varphi_\nu(u_2, \dots, u_n) du_\nu, \quad (10)$$

do něhož za  $u_\nu$  a za  $du_\nu$  dosadím podle (6), je tedy rozdílem dvou úplných diferenciálů a je tedy sám úplným diferenciálem. Ale součet (10) jest úplným diferenciálem také tehdy, jsou-li  $u_2, \dots, u_n$  nezávisle proměnnými; neboť z (6), (7) plyne

$$\frac{\partial X_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{1}{x_1} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_\mu}$$

pro  $\mu = 2, 3, \dots, n$ , takže podle (3) je

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} \quad (\mu, \nu = 2, 3, \dots, n).$$

Existuje tedy funkce  $\psi(u_2, \dots, u_n)$ , mající úplný diferenciál (10), takže (2) neboli (9) lze psáti též

$$dU = d(A \log |x_1|) + \sum_{v=2}^n \frac{\partial \psi}{\partial u_v} du_v, \quad (11)$$

kde  $u_v$  jsou všude určena vzorci (6).

A naopak: je-li  $\psi(u_2, \dots, u_n)$  jakákoliv funkce, je pravá strana rovnice (11) úplným diferenciálem, v němž koeficienty při  $dx_i$  jsou homogenní funkce stupně  $-1$ . Neboť píšeme-li

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_v} = \varphi_v(u_2, \dots, u_n),$$

lze rovnici (11) podle (6) ihned psáti ve tvaru

$$dU = \frac{A}{x_1} + \sum_{v=2}^n \varphi_v \left( \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right) \frac{x_1 dx_v - x_v dx_1}{x_1^2}.$$

Tedy: Rovnice (11), v níž  $\psi(u_2, \dots, u_n)$  je libovolná funkce, při čemž za  $u_2, \dots, u_n$ ;  $du_2, \dots, du_n$  dosazujeme  $x_1, \dots, x_n$ ;  $dx_1, \dots, dx_n$  podle vzorců

$$u_v = \frac{x_v}{x_1}, \quad du_v = \frac{1}{x_1^2} (x_1 dx_v - x_v dx_1),$$

nám dává nejobecnější totální diferenciální rovnici tvaru (2) s homogenními koeficienty stupně  $-1$ .

Parciální derivace funkce  $\psi$ , t. j. funkce  $\varphi_v$ , ovšem mohou, ale nemusí býti homogenní.

2. Jsou-li  $X_i$  v (2) homogenní řádu  $k \neq -1$ , lze integraci rovnice (2) ihned provéstí vzorcem (5). Ale pro  $k = -1$  je tomu jinak, neboť rovnice (11) ukazuje, že  $U(x_1, \dots, x_n)$  nemůžeme obdržeti bez užití obvyklých způsobů integrace úplných diferenciálů. Neboť z (11) plyne

$$U(x_1, \dots, x_n) - A \log |x_1| = \int \sum_{v=2}^n \varphi_v(u_2, \dots, u_n) du_v \quad (12)$$

kde pravá strana značí výsledek integrace úplného diferenciálu (10), v němž za  $u_2, \dots, u_n$  je dosazeno podle (6). Pojmu-li tedy do funkce  $\psi(u_2, \dots, u_n)$  additivní integrační konstantu, plyne z (12)

$$U(x_1, \dots, x_n) - A \log |x_1| = \psi \left( \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right). \quad (13)$$

Najdu-li tedy nějakým způsobem funkci  $U$ , je tím nalezena i funkce  $\psi(u_2, \dots, u_n)$  a naopak. Integrace totálního diferenciálu (2) s homogenními koeficienty  $X_i$  stupně  $-1$  je tedy úkol právě tak obtížný

jako integrace totálního diferenciálu (10) s libovolnými koeficienty  $\varphi$ , a s  $n - 1$  nezávisle proměnnými (na př. pro  $n = 2$  je integrace tot. diferenciálu (10) ekvivalentní s výpočtem integrálu

$$\int \varphi_2(u_2) du_2).$$

3. Rovnice (11) dává nejobecnější tvar totální rovnice (2) s homogenními koeficienty stupně  $k = -1$ . Rozřešme podobnou úlohu pro  $k \neq -1$ . Rovnice (5) říká, že  $U$  je — až na konstantu  $C$  — homogenní funkce  $f(x_1, \dots, x_n)$  stupně  $k + 1$ , takže (2) má tvar

$$dU = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \quad (14)$$

kde  $f$  je homogenní funkce stupně  $k + 1$ . Naopak, je-li  $f(x_1, \dots, x_n)$  homogenní stupně  $k + 1$ , jsou koeficienty při  $dx_i$  v (14) homogenní stupně  $k$ . Tím je úloha řešena.

4. Jako aplikaci vyšetřujeme diferenciální homogenní rovnici

$$X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0, \quad (15)$$

kde levá strana je totální diferenciál a funkce  $X, Y$  jsou homogenní stupně  $k$ . Je-li  $k \neq -1$ , je obecný integrál podle (5) dán vzorcem

$$X \cdot x + Y \cdot y = (k + 1) C = C_1,$$

kde  $C$  resp.  $C_1$  značí integrační konstantu. Budiž za druhé  $k = -1$ , takže podle (8) je  $X \cdot x + Y \cdot y = \alpha$ , ( $\alpha$  konstanta), načež  $X = \alpha \cdot x^{-1} - Y y \cdot x^{-1}$  a (15) nabude tvaru

$$\frac{\alpha dx}{x} + Y \frac{x dy - y dx}{x} = 0.$$

Ale podle předpokladu

$$Y(x, y) = \frac{1}{x} \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

takže substituce  $u = y \cdot x^{-1}$  vede k rovnici

$$\frac{\alpha dx}{x} + \varphi(u) du = 0, \quad \text{t. j.} \quad \alpha \log |x| + \int \varphi(u) du = C,$$

kde po výpočtu integrálu jest dosaditi  $u = y \cdot x^{-1}$ . Je patrné, že v tomto případě  $k = -1$  neposkytuje tento způsob žádných výhod proti obvyklé metodě.

## 5. Příklady.

1. Najděte funkci  $U$ , vyhovující rovnici

$$dU = \left( \frac{2x^3 - 3z^3}{x^4} - \frac{y^2 z}{x^4} \cos \frac{z}{x} - \frac{2y^2}{x^3} \sin \frac{z}{x} \right) dx +$$

$$+ \frac{2y}{x^2} \sin \frac{z}{x} dy + \left( \frac{3z^2}{x^3} + \frac{y^2}{x^3} \cos \frac{z}{x} \right) dz.$$

Koeficienty při  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (jež zde i v následujícím příkladě označíme  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) splňují podmínky integrability a rovnici  $Xx + Yy + Zz = 2$ , načež

$$dU = \frac{2}{x} dx + Y \frac{x dy - y dx}{x} + Z \frac{x dz - z dx}{x};$$

dosadím-li za  $Y$ ,  $Z$  a položíme-li  $y \cdot x^{-1} = v$ ,  $z \cdot x^{-1} = t$ , obdržím:

$$dU = \frac{2}{x} (dx + 2v \sin t dv + (3t^2 + v^2 \cos t) dt).$$

Poslední dva členy tvoří totální diferenciál, ale jeho koeficienty nejsou homogenní funkce. Integrujeme-li obvyklým způsobem a zavedeme-li nakonec opět  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , obdržíme

$$U = 2 \log |x| + \frac{y^2}{x^2} \sin \frac{z}{x} + \frac{z^3}{x^3} + C.$$

2. V rovnici

$$dU = \frac{1}{x^4} (2xz^2 - x^2y - 3y^2z) dx + \frac{1}{x^3} (x^2 + 2yz) dy + \\ + \frac{1}{x^3} (y^2 - 2xz) dz$$

jsou rovněž splněny podmínky integrability a jest  $Xx + Yy + Zz = 0$ . Obdobným způsobem jako v předešlém případě obdržíme

$$dU = (1 + 2vt) dv + (v^2 - 2t) dt.$$

Zde pravá strana je součtem tří totálních „homogenních“ diferenciálů stupně 0, 1, 2, totiž  $dU = dv - 2t dt + (2vt dv + v^2 dt)$ ; integrují-li každý člen podle vzorce (5), obdržím

$$U = v - \frac{2t^2}{2} + \frac{2vt \cdot v + v^2 \cdot t}{3} + C,$$

t. j.

$$U = \frac{y}{x} - \frac{z^2}{x^2} + \frac{y^2z}{x^3} + C.$$

\*

**Remarque à l'article „Sur l'intégration des différentielles totales“<sup>1)</sup>.**

(Résumé de l'article précédent.)

Considérons l'équation (2), où les  $X_i$  sont des fonctions homogènes du degré  $k$  satisfaisant aux conditions (3). Si  $k \neq -1$ , l'intégrale de (2) est donnée par (5) et l'équation (2) la plus générale de ce genre est de la forme (14), où  $f(x_1, \dots, x_n)$  est une fonction homogène quelconque du degré  $k + 1$ . Pour  $k = -1$ , les choses sont plus compliquées: la forme la plus générale de l'équation (2) est donnée par (11), où  $A$  est une constante quelconque et où  $\varphi(u_1, \dots, u_n)$  est une fonction *arbitraire*; les  $u_v$ ,  $du_v$  sont définis par (6). L'intégration de (2) pour  $k = -1$  exige donc l'intégration d'une différentielle totale (10) (à  $n - 1$  variables) qui peut être absolument arbitraire. (On suppose partout la continuité des dérivées partielles rentrant dans le calcul.)

---

<sup>1)</sup> Cf. Časopis 57 (1928), 87—94.