

Matyáš Lerch

O transformaci řad v řady rychleji konvergentní se zvláštním zřetelem k zobecněné harmonické řadě  $R(u, s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(u+r)^s} \cdot [I.]$

Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, Vol. 49 (1920), No. 1, 49--54

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121741>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1920

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O transformaci řad v řady rychleji konvergentní se zvláštním zřetelem k zobecněné harmonické

$$\text{řadě } R(u, s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(u+r)^s}.$$

Píše **M. Lerch** v Brně.

Uvedená řada konverguje pro případ, že realná část exponentu  $s$  převyšuje 1 (základní proměnnou  $u$  považujeme za kladnou a realnou); chceme se pokusiti o vytvoření jiné řady

$$S = \sum_0^{\infty} \varphi_r(s),$$

která má vůči  $s$  konvergenční obor širší a je s řadou  $R$  v úzké souvislosti.

K tomu vede okolnost, že integrál

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(u+r+x)^s} = \frac{\left(u+r-\frac{1}{2}\right)^{1-s} - \left(u+r+\frac{1}{2}\right)^{1-s}}{s-1}$$

má hodnotu blízkou veličině  $\frac{1}{(u+r)^s}$ ; volíme tedy za  $\varphi_r$  rozdíl obou těchto hodnot, t. j.

$$\varphi_r(s) = \frac{1}{(u+r)^s} + \frac{\left(u+r+\frac{1}{2}\right)^{1-s} - \left(u+r-\frac{1}{2}\right)^{1-s}}{s-1} \quad (1)$$

Pišme k vůli zkrácení  $u+r = w$ ; bude dle věty binomické

$$\begin{aligned} \left(w \pm \frac{1}{2}\right)^{1-s} &= w^{1-s} \pm (1-s) \frac{1}{2w^s} + \frac{s(s-1)}{2} \frac{1}{4w^{s+1}} \\ &\quad \mp \frac{(s-1)s(s+1)}{6} \frac{1}{8w^{s+2}} + \dots \end{aligned}$$

tedy

$$\frac{1}{w^s} + \frac{\left(w + \frac{1}{2}\right)^{1-s} - \left(w - \frac{1}{2}\right)^{1-s}}{s-1} = -\frac{s(s+1)}{24w^{s+2}} + \dots$$

Pravá strana je veličina typu

$$-\frac{s(s+1)}{24w^{s+2}} \left[ 1 + \frac{a_1}{w^2} + \frac{a_2}{w^4} + \dots \right],$$

a bude tedy pro dosti veliká  $w$  menší než dvojnásobný napsaný první člen; z toho vychází, že takto tvořená řada  $S$  konverguje, jakmile reálná část veličiny  $s$  převyšuje  $-1$ .

Její hodnotu určíme na základě tvaru

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{n-1} \varphi_v(s),$$

a sice za předpokladu real.  $s > 1$ , abychom docílili poznání její souvislosti s řadou  $R$ .

Tu jest dle (1)

$$\sum_{v=0}^{n-1} \varphi_v(s) = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{1}{(u+v)^s} + \frac{\left(u + n - \frac{1}{2}\right)^{1-s}}{s-1} - \frac{\left(u - \frac{1}{2}\right)^{1-s}}{s-1};$$

při tom se omezujeme na předpoklad  $u > \frac{1}{2}$ , což lze s malou úpravou výrazu vždy zaříditi. Druhý člen v pravo za učiněné supposice blíží se nule s nekonečně rostoucím  $n$ , a vychází

$$S = R(u, s) - \frac{\left(u - \frac{1}{2}\right)^{1-s}}{s-1},$$

čili

$$(A) \quad R(u, s) - \frac{1}{s-1} = \frac{\left(u - \frac{1}{2}\right)^{1-s} - 1}{s-1} + \sum_{v=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(u+v)^s} + \frac{\left(u+v+\frac{1}{2}\right)^{1-s} - \left(u+v-\frac{1}{2}\right)^{1-s}}{s-1} \right\}.$$

Tim je řada  $R(u, s)$  převedena na výraz, který konverguje již pro real.  $s > -1$ , tedy také v okolí bodů  $s = 0$  a

$s = 1$ ; tím je tedy též funkce  $R$  do tohoto oboru prodloužena (propagována).

Zároveň vysvětluje, že rozdíl

$$R(u, s) - \frac{1}{s-1}$$

je na místě  $s=1$  funkce spojitá (víme z jiných pramenů, že je pro všechna  $s$  spojitá).

Hodnotu tohoto rozdílu pro  $s=1$ , t. j.

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left\{ R(u, s) - \frac{1}{s-1} \right\}$$

obdržíme přímým dosazením  $s=1$  na pravé straně, t. j.

$$\begin{aligned} & -\log\left(u - \frac{1}{2}\right) + \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{u+r} - \log\left(u+r + \frac{1}{2}\right) + \right. \\ & \quad \left. + \log\left(u+r - \frac{1}{2}\right) \right\} \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{u+r} - \log\left(u+n - \frac{1}{2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Připojíme-li

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log\left(u+n - \frac{1}{2}\right) - \log n \right\} = 0,$$

máme (H. Kinkelin)

$$\begin{aligned} (B) \quad \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ R(u, s) - \frac{1}{s-1} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{u+r} - \log n \right\} \\ &= E + \sum_{r=0}^{\infty} \left( \frac{1}{u+r} - \frac{1}{r+1} \right), \end{aligned}$$

kde

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{\mu} - \log n \right)$$

je t. zv. Eulerova konstanta. Pravá strana rovnice (B) vyskytuje se v elementech pod značením

$$-\Psi(u) = -\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}.$$

Přístupme nyní k hodnotě  $s=0$ ; v tom případě vymizí obecný člen v řadě, a zbývá

$$R(u, 0) = \frac{1}{2} - u.$$

Řadu (A) je dovoleno také derivovati na  $s=0$ ; obdržíme

$$R'_s(u, 0) = \left(u - \frac{1}{2}\right) \left[ \log \left(u - \frac{1}{2}\right) - 1 \right] \\ + \sum_w \left\{ \left(w + \frac{1}{2}\right) \left[ \log \left(w + \frac{1}{2}\right) - 1 \right] - \right. \\ \left. - \left(w - \frac{1}{2}\right) \left[ \log \left(w - \frac{1}{2}\right) - 1 \right] - \log w \right\}, \\ (w = u + v; v = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Znamenáme-li tento výraz  $\Phi(u)$  a utvoříme-li součet prvních  $n$ -členů v pravo, máme

$$\Phi(u) \infty - \log u - \sum_1^{n-1} \log(u+v) + \\ + \left(u + n - \frac{1}{2}\right) \left[ \log \left(u + n - \frac{1}{2}\right) - 1 \right], \quad (2) \\ \Phi(u) \infty - \log u + \sum_1^{n-1} \log \frac{\left(1 + \frac{1}{v}\right)^u}{1 + \frac{u}{v}} - \sum_1^{n-1} \log v - u \log n \\ + \left(u + n - \frac{1}{2}\right) \left[ \log \left(u + n - \frac{1}{2}\right) - 1 \right].$$

Poněvadž pak pro nekonečná  $n$

$$(n + \xi) \log(n + \xi) - n - \xi \infty (n + \xi) \log n - n,$$

vychází

$$\Phi(u) \infty - \log u + \sum_1^{\infty} \log \frac{\left(1 + \frac{1}{v}\right)^u}{1 + \frac{u}{v}} - \sum_1^{\infty} \log v + \\ + \left(n - \frac{1}{2}\right) \log n - n.$$

Určení konstanty provede se dle zákona Stirlingova

$$-\log(n-1)! + \left(n - \frac{1}{2}\right) \log n - n + \log \sqrt{2\pi} \infty 0. \quad (3)$$

takže při obvyklé definici funkce gamma Eulerovým součinem

$$\Gamma(u) = \frac{1}{u} \prod_{r=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{v}\right)^u}{1 + \frac{u}{v}}$$

vychází (Ernst Schröder)

$$(C) \quad \psi(u) = \log \frac{\Gamma'(u)}{\sqrt{2\pi}} = R'_s(u, 0).$$

V každém případě můžeme se vyhnouti vzorci (3). Položme

$$\Phi(u) = C + \log \Gamma(u). \quad (4)$$

Z identity

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{(u+2v)^s} + \sum_0^{\infty} \frac{1}{(u+2v+1)^s} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(u+\mu)^s}$$

plyne

$$R\left(\frac{u}{2}\right) + R\left(\frac{u+1}{2}\right) = 2^s R(u):$$

derivace na  $s=0$  dá

$$\Phi\left(\frac{u}{2}\right) + \Phi\left(\frac{u+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - u\right) \log 2 + \Phi(u)$$

tudíž dle (4)

$$2C + \log \Gamma\left(\frac{u}{2}\right) \Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - u\right) \log 2 + C + \log \Gamma(u).$$

Odtud

$$C = \left(\frac{1}{2} - u\right) \log 2 + \log \frac{\Gamma(u)}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)} - \log \Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right),$$

a pro  $u=0$ :

$$C = \frac{1}{2} \log 2 - \log 2 - \log \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\log \sqrt{2\pi}. \quad (5)$$

Tím tedy též dokázán vztah (3). Rovnice (2) dává

$$\begin{aligned} \log \Gamma(u+n) &\sim \log \sqrt{2\pi} + \left(u+n - \frac{1}{2}\right) \log \left(u+n - \frac{1}{2}\right) - \\ &\quad - \left(u+n - \frac{1}{2}\right) \\ &\sim \log \sqrt{2\pi} + \left(u+n - \frac{1}{2}\right) \log(u+n) - (u+n), \end{aligned}$$

t. j. asymptotický vzorec Stirlingův

$$\log \Gamma(a) \sim \left(a - \frac{1}{2}\right) \log a - a + \log \sqrt{2\pi}. \quad (6)$$

K ustanovení definitivní hodnoty (5) užito vzorce Wallissova

$$I' \left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 2 \prod_1^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{v}}}{1 + \frac{1}{2v}},$$

t. j.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= 2 \prod \frac{2v(2v+2)}{(2v+1)^2} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdots \\ &= \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \end{aligned}$$

(Pokračování.)

## Několik poznámek o čtyřstěnu.\*

Napsal Jan Schuster, prof. reálky v Pardubicích.

I. V následujících úvahách uijme označení obdobného jako v rovinné trigonometrii, jež umožní cyklickou substituci ve třech nebo čtyřech prvcích a počet zjednoduší. Čtyřstěn o rozích  $K_1, K_2, K_3, K_4$ , měj sferické siny trojhranů  $E_1, E_2, E_3, E_4$ , sferické siny trojhranů k těmto polárních  $E_1, E_2, E_3, E_4$  a protější stěny  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ . Berme  $\mathcal{A}_4$  za podstavu o hranách  $a', b', c'$  a hrany protější buďte  $a, b, c$ . K těmto hranám přiléhající úhly stěnové značme souhlasně  $\alpha', \beta', \gamma', \alpha, \beta, \gamma$ , a úhly hranové označme písmeny souhlasnými s protější hranou stěny a jejím indexem, totiž stěna  $\mathcal{A}_4$  měj hranové úhly  $a_4, b_4, c_4$ , stěna  $\mathcal{A}_1 \dots a_1, b_1, c_1$  atd. Ostatní označení zavedeme dle potřeby.

Jako základních prvků použijeme hlavně stěn a úhlů stěnových.

II. Obsah čtyřstěnu  $T$ , který se obyčejně vyjadřuje ve tvaru:

$$T = \frac{1}{3} a l c E_4,$$

přepišme ve tvar, jenž obsahuje toliko stěny a sinus polárního trojhranu  $E_4$ , uijíce výrazů pro obsah trojúhelníků:

$$ab \sin c_3 = 2\mathcal{A}_3 \quad lc \sin a_1 = 2\mathcal{A}_1 \quad ca \sin b_2 = 2\mathcal{A}_2.$$

\*) Tato práce je prvním sdělením auktorovým z jeho prací o čtyřstěnu z roku 1915 a proto časově předchází pojednání v »Zeitschrift für das Realschulwesen« z roku 1917 a v Rozpravách České Akademie z roku 1918 č. 30.