# Úlohy

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 49 (1920), No. 1, 76--80

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121744

**Březen.**

*Zatmění měsíčků Jup.*:

I. (*k* 1·9) *6* $19^h22^m$; *13* $21^h17^m$; *20* $23^h12^m$; *29* $19^h36^m$
II. (*k* 2·3) *12* $19^h7^m$; *19* $21^h42^m$

*Minima Algolu*: *1* $4^h55^m$; *4* $1^h44^m$; *6* $22^h34^m$; *9* $19^h23^m$; *24* $3^h29^m$; *27* $0^h18^m$; *29* $21^h8^m$.
*Konjunkce*: *13* $4^h$ Jupitera s Neptunem, Jup. 58′ sev.
*21* $6^h$ Venuše s Uranem, Uran 21′ již.

**Duben.**

*Zatmění měsíčků Jup.*:

I. (*k* 2·1) *5* $21^h31^m$; *12* $23^h27^m$; *21* $19^h51^m$; *28* $21^h46^m$
II. (*k* 2·7) *20* $21^h19^m$; *27* $23^h54^m$
III. (*k* 3·7) *9* $20^h37^m$
IV. (*z* 3·7) *10* $22^h48^m$.

*Minima Algolu*: *16* $2^h2^m$; *18* $22^h51^m$; *27* $21^h45^m$.
*Létavice*: *19* až *22* Lyridy, rad. 104 Herc., let rychlý.

**Květen.**

*Zatmění měsíčků Jup.*:

I. (*k* 2·0) *5* $23^h42^m$; *21* $22^h2^m$; *22* $20^h55^m$; *28* $23^h57^m$
II. (*k* 2·7) *29* $23^h30^m$
III. $\begin{cases}(z\ 1·8) & 22\ 20^h37^m \\ (k\ 3·7) & 15\ 20^h16^m\end{cases}$

*Létavice*: *1.* až *6.* Aquaridy, rad. $\eta$ Aquarii, let rychlý, s ohonem.
*Konjunkce*: *3* $21^h$ Venuše s *o* Piscium (4·6 vel.) * 12′ již.

**Červen.**

*Zatmění měsíčků Jup.*:

I. (*k* 1·8) *13* $22^h16^m$; IV. (*z* 2·8) *17* $23^h1^m$
*Konjunkce*: $5^h$ Marta s Měsícem, ♂ 1° sev.

*M.*

---

# Úlohy.

## *a*) Z mathematiky.

1.

Do rotačního paraboloidu vepište rotační válec největšího *a*) objemu, *b*) pláště. Srovnejte objemy a pláště obou výsledků.

Prof. *Jiří Archleb.*

2.

Odvoďte vztah platný pro úhly v trojúhelníku

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)=2(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+ \\ +\sin\alpha\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha+\sin\beta\sin^2\tfrac{1}{2}\beta+\sin\gamma\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma).$$

Dr. *Jaroslav Bílek.*

3.

V trojúhelníku $ABC$ jest půdice $AB$ pevná, vrchol $C$ pohybuje se tak, že mezi úhly $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ neustále v platnosti je relace: $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$. Jakou křivku opisuje vrchol $C$?

† *Rudolf Hruša.*

4.

Číslo $N=2^{173}+1$ dá se děliti prvočísly 3 a 4153. Jak se o tom přesvědčíme, znajíce na př. $2^{43}$, avšak nevypočítávajíce přímo $2^{173}$? Dr. *Jiří Kaván.*

5.

Ellipsa jest určena svými poloosami; která kružnice s ellipsou soustředná protíná ji pod největším úhlem?

Prof. *J. Kroupa.*

6.

Vypočísti obsah kužele omezeného rotační plochou kuželovou, jejíž osový řez jest pravý úhel, a rovinou protínající plochu kuželovou v ellipse tak, že největší strana kužele jest $a$, nejmenší $b$. Prof. *J. Kroupa.*

7.

Vypočtěte strany trojúhelníka, v němž dán poloměr $R$ kružnice trojúhelníku opsané, součet čtverců stran a jehož strany tvoří posloupnost arithmetickou. *Karel Lerl.*

8.

Které trojciferné číslo rovná se součtu trojmocí svých číslic? Prof. *Ant. Lochmann.*

9.

Řešte soustavu rovnic $x+y-z=a$, $x^2+y^2-z^2=b$, $x^3+y^3-z^3=c$. (Na př. $a=-1$, $b=-2$, $c=-3$.)

† *Jar. Pilnáček.*

10.

Je-li v trojúhelníku $\beta-\gamma=\frac{1}{2}\pi$, dokaž, že platí vztah

$$\frac{2}{a^2}=\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}.$$

Prof. *Pleskot.*

11.

Daným bodem $A'$ na pobočné hraně $AD$ pravidelného trojbokého jehlanu (podstavná hrana $a$, úhel pobočných hran $\alpha$) vésti rovinný řez nejmenšího obvodu, stanoviti jeho obsah a odchylku od podstavy. Prof. *E. Pleva.*

12.

Dokažte, že ve čtyřúhelníku tetivovém, jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo, jest průměr závislý na protějších stranách tak, že jest úhlopříčkou obdélníka, jehož rozměry jsou protější strany čtyřúhelníka. Prof. *E. Pleva.*

13.

V pravidelném hranolu $2n$-bokém promítněte ze středu jedné podstavy sudé vrcholy druhé podstavy $n$-hranem, a podobně liché vrcholy první podstavy ze středu druhé. Jak velká část obsahu celého hranolu je omezena oběma mnohohrany? Prof. *Jan Schuster.*

14.

Sečísti řady $1^2 \sin x + 2^2 \sin 2x + 3^2 \sin 3x + \ldots$, $1^2 \cos x + 2^2 \cos 2x + 3^2 \cos 3x + \ldots$ Dr. *J. Štěpánek*, Tábor.

15.

Do ellipsy s poloosami $ab$ jest vepsán kosočtverec, jehož vrchly splývají s vrcholy ellipsy. Do kosočtverce je vepsána maksimální ellipsa souosá, do ní opět kosočtverec atd. Stanoviti jest součet ploch kosočtverců a ellips. Dr. *J. Zahradníček.*

## *b*) Z deskriptivní geometrie.

1.

Třemi mimoběžkami proložiti roviny tvořící pravoúhlý trojhran. Dr. *Josef Klíma.*

2.

Dvěma body proložiti v prostoru kružnici protínající *a*) dvě rovnoběžky, *b*) dvě různoběžky. Dr. *Josef Klíma.*

3.

Jest sestrojiti rotační plochu kuželovou, určenou rovinou, jež seče plochu v rovnoosé hyperbole, osou $o$ a bodem povrchu $M$.
Prof. *E. Pleva.*

### c) Z fysiky.

1.

Vodorovná kruhová deska o průměru 10 *cm* se otáčí ve vodorovné rovině kolem svého středu, rovnoměrně tak, že doba jednoho oběhu je 4 vteřiny. Při tom běží po ní podél jednoho průměru moucha od jednoho kraje desky k druhému, rovnoměrně vzhledem k desce a proběhne celý průměr právě za dobu jedné otočky, t. j. 4 vteřiny Jaká je skutečná dráha mouchy a které jsou její největší a nejmenší rychlost vzhledem k pevnému okolnímu prostoru?

(*B. K.* dle vstupní zkoušky na londýnské universitě.)

2.

K homogenní tyči $AB$, 40 *cm* dlouhé, jež se může otáčeti ve vertikální rovině kolem konce $A$, jest v $B$ přivázána niť, která jest vedena přes kladku $C$ a zatížena na svém konci závažím 1 *kg*. Je-li $BC$ horizontální a má-li kolmice $AD$ spuštěná z $A$ na zpětné prodloužení horizontály $BC$ délku 20 *cm*, najděte váhu tyče a velikost i směr reakce v bodě otáčecím $A$.

(*B. K.* dle vstupní zkoušky na londýnské universitě.)

3.

Na dokonale hladké horizontální rovině $AD$ jest v bodě $A$ zakloubena bezvážná tyč $AC$ tak, že se může volně (bez tření) otáčeti v rovině vertikální. Na svém konci $C$ nese druhou stejně dlouhou bezvážnou tyč $CB$, která se v kloubu v $C$ zase může volně otáčeti v téže vertikální rovině jako $AC$. Konec její $B$ spočívá na hladké rovině $AD$, takže $ABC$ tvoří rovnoramenný vertikální trojúhelník. V jeho rovině působí na střed tyče $AC$ síla $Q$ na střed $CB$ síla $P$, obě kolmé na příslušných tyčích a směřující dovnitř trojúhelníku $ABC$. Najděte rovnovážnou polohu tyčí (úhel $\vartheta$, který svírá $AC$ s vertikálou) a dokažte, že je-li $P = 2Q$, je trojúhelník $ABC$ rovnostranný. (Důkaz lze vésti také principem virtuálných posunutí.) (*B. K.*)

4.

Homogenní deska má tvar čtverce, k jehož jedné straně je připojen rovnoramenný trojúhelník. Strana čtverce je $a$, výška trojúhelníku $h$. Najděte polohu těžiště celku a určete velikost $h$, při které leží těžiště právě na straně čtverce, která je základnou trojúhelníku. Výsledek můžete snadno verifikovati pokusem na obrazci vyříznutém z lepenky. (*B. K.*)

5.

Polokruhovitá homogenní deska stojí ve vertikální rovině opřena zakřivenou částí svého obvodu jednak na půdě jednak na vertikální zdi. Koefficient tření mezi deskou a půdou a mezi deskou a zdí je týž, rovný $f$. Dokažte, že deska může spočívati v klidu v každé poloze, ve které její přímá strana svírá s vertikálou úhel $\alpha > \alpha_0$, kdež

$$\cos \alpha_0 = \frac{3\pi}{4} \frac{f + f^2}{1 + f^2}.$$

Vzdálenost těžiště desky od středu jejího, kteráž jest rovna $^4/_3\pi$-násobnému poloměru, a kterou ve vývodu potřebujete, také odvoďte. (*B. K.*

## Řešení úloh.

Řešení úloh buďtež zaslána nejpozději do **20. dubna 1920** na adresu: S. doc. Dr. *K. Rychlík* na Král. Vinohradech, Slezská ul. 66.

Páni řešitelé se žádají, aby řešení každé úlohy bylo napsáno *zvlášť* na jednu nebo několik čtvrtek papíru obyčejného formátu. V čele každého řešení budiž uvedeno číslo úlohy (tekst úlohy není nutno psáti), jméno řešitele a ústavu, na němž studuje. Řešení buďtež seřazena dle čísel, a jsou-li zasílána v obalu menšího formátu než čtvrtkového, jako celek složena. Zároveň uveďte páni řešitelé při poslední zásilce na zvláštním lístku papíru seznam všech řešení, která vůbec zaslali.

Mimo to je nutno, aby páni řešitelé uvedli přesnou adresu svou, aby mohly býti ceny správně rozeslány.

*Nezapomeňte zásilek dostatečně frankovati:* do 20 gr. 25 hal., za každých dalších 20 gr. 10 hal.