

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

Václav Láska

Některé věty trigonometrické

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 27 (1898), No. 3, 217--220

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121864>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1898

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

*Poznámka.* Hodnoty  $\sqrt[5]{1}$  jsou kořeny rovnice

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0;$$

rovnice stupně čtvrtého jest reciproká.

## Některé věty trigonometrické.

Žákům středních škol podává

**Dr. V. Láska,**

docent české vysoké školy technické v Praze.\*)

Označme strany trojúhelníka  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a protilehlé úhly  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ; pak platí, jak známo, věty:

$$\begin{aligned} b \cos \alpha + a \cos \beta &= c \\ b \sin \alpha - a \sin \beta &= 0. \end{aligned}$$

Položíme-li

$$\begin{aligned} a &= s_1 + s_2, & \alpha &= S_1 + S_2, \\ b &= s_1 - s_2, & \beta &= S_1 - S_2, \end{aligned}$$

nabudeme

$$\begin{aligned} s_1 \{ \cos (S_1 + S_2) + \cos (S_1 - S_2) \} \\ - s_2 \{ \cos (S_1 + S_2) - \cos (S_1 - S_2) \} &= c, \\ s_1 \{ \sin (S_1 + S_2) - \sin (S_1 - S_2) \} \\ - s_2 \{ \sin (S_1 + S_2) + \sin (S_1 - S_2) \} &= 0. \end{aligned}$$

Poněvadž však

$$\begin{aligned} \sin (S_1 + S_2) + \sin (S_1 - S_2) &= 2 \sin S_1 \cos S_2, \\ \sin (S_1 + S_2) - \sin (S_1 - S_2) &= 2 \cos S_1 \sin S_2, \\ \cos (S_1 + S_2) + \cos (S_1 - S_2) &= 2 \cos S_1 \cos S_2, \\ \cos (S_1 + S_2) - \cos (S_1 - S_2) &= -2 \sin S_1 \sin S_2, \end{aligned}$$

bude

$$(1) \quad \begin{aligned} 2 s_1 \cos S_1 \cos S_2 + 2 s_2 \sin S_1 \sin S_2 &= c, \\ s_1 \cos S_1 \sin S_2 - s_2 \sin S_1 \cos S_2 &= 0, \end{aligned}$$

\*) t. č. professor vyšší geodaesie i astronomie při c. k. vysoké škole technické ve Lvově.

takže máme vzorce:

$$(2) \quad \begin{aligned} (a+b) \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + (a-b) \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} &= c, \\ (a+b) \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} - (a-b) \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnice dává větu tangentovou

$$(3) \quad (a+b) \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2} = (a-b) \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Vyloučíme-li z rovnic (2) veličiny  $(a-b)$  neb  $(a+b)$ , obdržíme vzorce Cagnoliovy

$$(4) \quad \begin{aligned} a+b &= c \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}}, \\ a-b &= c \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}. \end{aligned}$$

Poněvadž

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90 - \frac{\gamma}{2},$$

bude dále:

$$(5) \quad \begin{aligned} c \sin \frac{\alpha-\beta}{2} &= (a-b) \cos \frac{\gamma}{2}, \\ c \cos \frac{\alpha-\beta}{2} &= (a+b) \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Položme nyní v základních rovnicích

$$\begin{aligned} a &= m - (m-a), \\ b &= m - (m-b); \end{aligned}$$

pak bude

$$\begin{aligned} m \{\cos \alpha + \cos \beta\} &= (m-b) \cos \alpha + (m-a) \cos \beta + c, \\ m \{\sin \alpha - \sin \beta\} &= (m-b) \sin \alpha - (m-a) \sin \beta \end{aligned}$$

aneb

$$\begin{aligned}\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} &= \frac{m-b}{2m} \cos \alpha + \frac{m-a}{2m} \cos \beta + \frac{c}{2m}, \\ \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{m-b}{2m} \sin \alpha - \frac{m-a}{2m} \sin \beta\end{aligned}$$

a dělením

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(m-b) \sin \alpha - (m-a) \sin \beta}{(m-b) \cos \alpha + (m-a) \cos \beta + c}.$$

Položme nyní

$$m - a = 0,$$

pak jest

$$(6) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(a-b) \sin \alpha}{(a-b) \cos \alpha + c}.$$

Položíme-li

$$m - b = 0,$$

plyne

$$(7) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(a-b) \sin \beta}{(a-b) \cos \beta - c}$$

a konečně pro

$$m - c = 0,$$

$$(8) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(c-b) \sin \alpha - (c-a) \sin \beta}{(c-b) \cos \alpha + (c-a) \cos \beta}.$$

Vzorců (6) a (7) lze výhodně použítí pro rozvinutí v řady v případě, že  $a$  jest málo rozdílným od  $b$ . Jimi řešen úkor z daných veličin

$$a - b, a - c, a$$

vypočísti trojúhelník.

Z rovnice (7) plyne, značí-li  $\lambda$  ještě neznámý faktor:

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha - \beta}{2} &= \lambda \{(a-b) \sin \beta\}, \\ \cos \frac{\alpha - \beta}{2} &= \lambda \{(a-b) \cos \beta - c\}.\end{aligned}$$

Abychom  $\lambda$  určili, použijme vztahu

$$1 = \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2},$$

takže bude

$$\begin{aligned} 1 : \lambda^2 &= [(a - b) \sin \beta]^2 + [(a - b) \cos \beta - c]^2 \\ &= (a - b - c)^2 + 4c(a - b) \sin^2 \frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

i máme potom

$$(9) \quad \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(a - b) \sin \beta}{\sqrt{(a - b - c)^2 + 4c(a - b) \sin^2 \frac{\beta}{2}}},$$

$$(10) \quad \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(a - b) \cos \beta - c}{\sqrt{(a - b - c)^2 + 4c(a - b) \sin^2 \frac{\beta}{2}}}.$$

Vztahy takové, ač k výpočtu nejsou způsobilé, dlužno přece znáti, neboť mohou někdy komplikované výpočty zjednodušiti.

V Praze, v srpnu 1895.

## O trojúhelníku, jehož strany tvoří řadu arithmetickou.

Podává

**Antonín Libický,**

professor na Král. Vínohradech.

(Dokončení.)

Důležitými příčkami každého trojúhelníka jsou *těžnice*; pro náš zvláštní trojúhelník zjednoduší se vzorce, kterými se vypočítávají tyto příčky ze stran trojúhelníka, takto:

Budiž  $B_2$  rozpolovací bod strany AC trojúhelníka ABC; těžnici  $BB_2$  označme  $t_2$  a  $\omega$  jeden z obou úhlů vedlejších, jež tvoří u bodu  $B_2$  tato těžnice se stranou AC a to úhel ležící proti nejmenší straně  $a$ . V  $\triangle B_2CB$ , jehož strany jsou  $2m - d$ ,  $m$  a  $t_2$ , bude dle věty cosinové