Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 1, 125--128

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122111

Úlohy.

Z mathematatiky.

1.

Oběma ručičkám na hodinách nelze dáti libovolnou polohu. (Na př. polohou ručičky hodinové jest poloha ručičky minutové dána.) Kdy možno obě ručičky zaměniti, aby nová poloha dala se interpretovati jako údaj časový? M. F.

2.

Tři čísla tvoří řadu arithmetickou. Součin těch čísel jest a, součet jich trojmocí b. Která jsou to čísla? (Na př. $a = 80$, $b = 645$.) Prof. Rudolf Hruša.

3.

Jest řešiti rovnici

$$\cos 9x \cos^9 x + \sin 9x \sin^9 x = 1.$$

L. Krajný.

4.

Dokázati jest relaci

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\binom{n}{k}\binom{x}{k}}{\binom{y}{k}} = \frac{\binom{y-x}{n}}{\binom{y}{n}}.$$

Dr. Vladimír Živanský.

5.

Ze všech přímých válců stejného objemu nalézti onen, který má nejmenší povrch. Prof. Václav Hübner.

6.

Nalézti největší pravoúhlý rovnoběžnostěn, který lze vepsati dané kouli a) je-li základna čtverec, b) je-li základna obdélník o straně a. Prof. Václav Hübner.

7.

Sestrojíme-li symetrály vnějších úhlů trojúhelníka ABC, obdržíme při stranách jeho tři podobné trojúhelníky. Vepišme jim kruhy o středech M_1, M_2, M_3 a označme dotyčné body na stranách daného trojúhelníku písmeny A_1, B_1, C_1! Jest dokázati, že

a) spojnice AM_1, BM_2, CM_3 se protínají v jednom bodě,

b) „ AA_1, BB_1, CC_1 „ „ rovněž v jednom bodě.

Dr. *Josef Tomáš.*

8.

Dokažte, že spustíme-li z paty výšky trojúhelníku kolmice na druhé dvě výšky a jim příslušné strany, leží paty těchto čtyř kolmic v jedné přímce. Takové přímky dostaneme v trojúhelníku tři.

Kdy procházejí jedním bodem?

Dokažte o přímkách oněch:

a) úsečky jejich mezi dvěma příslušnými stranami trojúhelníku jsou si rovny,

b) trojúhelníky, které z daného trojúhelníku utínají, jsou navzájem a trojúhelníku danému podobny,

c) plochy těch tří trojúhelníků mají se k sobě jako čtverce výšek daného trojúhelníku.

Dr. *Josef Tomáš.*

9.

V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ jest úhlopříčka $AC = n$ půlena úhlopříčkou $BD = m$ v bodě E. Jest dokázati tyto vztahy:

1. $$ad = bc$$

2. $$m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2}.$$

Vypočísti úhel úhlopříček, dány-li dva sousední úhly čtyřúhelníku α, β.

Prof. *Rudolf Hruša.*

10.

Zdroj i cíl světelného paprsku jsou na přeponě trojúhelníku pravoúhlého v odlehlostech a, b od konců jejích, a paprsek se má odraziti na obou odvěsnách a na přímce rovnoběžné s přeponou. Ve které poloze této přímky nabude dráha paprsku extrémní délky? Prof. *Jan Schuster.*

11.

Tři zrcadlící přímky se dotýkají kruhu pevného. Z nich dvě jsou spolu rovnoběžné a pevné, zdroj i cíl paprsku jsou v odlehlosti a a b od nich na průměru spojujícím jejich body dotykové. Při které poloze třetí přímky bude dráha paprsku nejdelší? Prof. *Jan Schuster.*

12.

Dva úhly α, β mají společný vrchol a dvě jejich ramena svírají úhel pravý. Jest určiti přímku, jež protíná v obou úhlech stejné plochy. Vyšetřiti též obecně, kdy úhel ramen není pravý. Prof. *Jan Schuster.*

13.

Určete geometrické místo vrcholu trojúhelníku, jehož těžnice příslušná ku stálé základně jest střední měřickou úměrnou mezi oběma rameny. Dr. *J. Zahradníček.*

14.

Do daného obdélníku vepsati ellipsu o dané výstřednosti. Prof. *Rudolf Hruša.*

15.

Mnohoúhelník jest opsán parabole. Vzdálenosti jeho vrcholů od ohniska buďtež $v_1, v_2, \ldots v_n$, průvodiči bodů, v nichž se strany paraboly dotýkají, $r_1, r_2, \ldots r_n$. Pak jest

$$v_1\, v_2 \ldots v_n = r_1\, r_2 \ldots r_n.$$

Dr. *Karel Čupr.*

16.

Průvodiči bodu E na ellipse protínají tuto ještě v bodech E_1 a E_2. Jest nalézti geometrické místo bodů půlících tětivu $E_1 E_2$. Proveďte diskusi oné křivky. Dr. *Karel Čupr.*

17.

Z bodu M vedeny tečny k ellipse, jež tvoří s příslušnou polárou trojúhelník, mající těžiště na obvodě ellipsy. Určiti jest geometrické místo bodu M. Dr. *Vladimír Živanský.*

18.

Vedeme-li z libovolného bodu pevné přímky rovnoběžné s osou pořadnic normály k parabole $y^2 = 2px$, určují jich paty trojúhelníky, jež mají společné těžiště na ose paraboly.

Dr. *Vladimír Živanský.*

19.

Určiti geometrické místo průsečíků normál k parabole vedených v bodech, kde ji protínají přímky svazku jdoucí ohniskem. Dr. *Vladimír Živanský.*

20.

Najíti na parabole bod takový, aby normála v něm sestrojená omezovala úseč nejmenší plochy.

Dr. *Vladimír Živanský.*

Oprava.

Příloha k Čas. pro pěst. math. a fysiky roč. XLI.

Str. 96. řádek 4. a 6. (rovnice 9) shora, pod vnitřní odmocnítko připojiti člen: $+ 4 A C \cos^2 \omega$.

Str. 104. řádek 8. zdola 90^0 místo 90^9, řádek poslední $0—180^0$ místo $0—360^0$.

Str. 644. řádek 14. na pravé straně rovnice v čitateli připojiti činitele $u\omega$.
