Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

# Poznámky o soustavě paraboloidů procházejících dvěma danýma mimoběžkama a o útvarech s nimi souvislých. [III.]

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 46 (1917), No. 4-5, 332--338

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122169

**Terms of use:**

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1917

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

# Poznámky o soustavě paraboloidů procházejících dvěma danýma mimoběžkama a o útvarech s nimi souvislých.

Podává **M. Lerch** v Brně.

(Dokončení.)

Rovnice (9) dávají při $cos\ \omega = \infty$ úběžné body plochy $(V)$, pro něž

$$\frac{y}{x} = \pm i,$$

takže souhrn úběžných bodů je vystižen rovnicí

$$(x^2 + y^2) z^3 = 0.$$

Průseč konoidu $(V)$ s konoidem Plückerovým $(Q)$ sestává z patnácti přímek, z nichž

4 jsou soustředěny v $Oz$,
2 + 2 „ „ v přímkách $\delta$, $\delta_1$,
3 „ „ v úběžné přímce roviny základní,
2 jsou pomyslné přímky úběžné $x \pm iy = 0$,
2 jsou přímky $Ox$, $Oy$.

Z rovnic ($17^c$) na str. 128. vychází

$$(a)\qquad \begin{aligned} \frac{y + mx}{z + c} - \frac{y - mx}{z - c} &= 2\lambda m \cos \omega, \\ \frac{y + mx}{z + c} + \frac{y - mx}{z - c} &= 2\lambda \sin \omega, \end{aligned}$$

a odtud

$$\lambda \cos \omega = \frac{xz - 2ay \cos^2 \alpha}{z^2 - c^2}, \quad \lambda \sin \omega = \frac{yz - 2ax \sin^2 \alpha}{z^2 - c^2};$$

připojí-li se $z = a \sin 2\omega$, lze provésti eliminaci $\omega$ a $\lambda$, čímž vychází rovnice plochy ve tvaru

$$\begin{aligned} &[(xz - 2ay \cos^2 \alpha)^2 + (yz - 2ax \sin^2 \alpha)^2]\, z \\ &= 2a(xz - 2ay \cos^2 \alpha)(yz - 2ax \sin^2 \alpha), \end{aligned} \tag{20}$$

z něhož je zřejmo, že plocha vychází z konoidu Plückerova transformací

$$X = \frac{xz - 2ay \cos^2 \alpha}{L}, \quad Y = \frac{yz - 2ax \sin^2 \alpha}{L}, \quad Z = z, \tag{21}$$

po případě transformací, v níž $X$, $Y$ vymění své výrazy; při tom značí $L$ libovolnou funkci liter $x$, $y$, $z$.

Přehlednější jest rovnice v soustavě kosoúhlé

$$O\xi \equiv \delta_1', \quad O\eta \equiv \delta' \text{ (půdorysy přímek } \delta,\ \delta_1);$$

zde rovnice transformační

$$(b) \qquad y + mx = 2\eta \sin\alpha, \quad y - mx = -2\xi \sin\alpha$$

převádějí rovnice $(a)$ na

$$\lambda \cos\omega = \frac{(\xi + \eta)z + c(\xi - \eta)}{z^2 - c^2} \cos\alpha = \frac{A}{z^2 - c^2},$$

$$\lambda \sin\omega = -\frac{(\xi - \eta)z + c(\xi + \eta)}{z^2 - c^2} \sin\alpha = \frac{B}{z^2 - c^2},$$

a rovnici plochy odtud plynoucí

$$(A^2 + B^2)z = 2aAB$$

lze po jednoduché úpravě psáti

$$\xi^2(z + c)^3 + \eta^2(z - c)^3 + 2\xi\eta z(z^2 - c^2)\cos 2\alpha = 0. \quad (22)$$

Abychom si zjednali tangenciální rovnici konoidu v nové soustavě, užijme rovnic

$$-\xi = \frac{y - mx}{2\sin\alpha} = \frac{2a\lambda}{\sin 2\alpha} \sin^2(\omega - \alpha)\cos(\omega + \alpha),$$

$$\eta = \frac{y + mx}{2\sin\alpha} = \frac{2a\lambda}{\sin 2\alpha} \sin^2(\omega + \alpha)\cos(\omega - \alpha),$$

$$z = a \sin 2\omega.$$

Podmínky, aby rovina

$$u\xi + v\eta + wz + 1 = 0$$

obsahovala tuto přímku, znějí dle toho

$$(\alpha) \qquad aw \sin 2\omega = -1,$$

$$u \sin(\omega - \alpha)(\sin 2\omega - \sin 2\alpha)$$
$$= v \sin(\omega + \alpha)(\sin 2\omega + \sin 2\alpha);$$

první dává

$$\sin 2\omega - \sin 2\alpha = -\frac{1 + cw}{aw},$$

$$\sin 2\omega + \sin 2\alpha = -\frac{1 - cw}{aw},$$

načež se druhá podmínka přepíše na

$$(\beta) \qquad P \sin\omega \cos\alpha = Q \cos\omega \sin\alpha,$$

$$P = u(1 + cw) - v(1 - cw), \quad Q = u(1 + cw) + v(1 - cw).$$

Z rovnice ($\beta$) obdržíme

$$P^2 \cos^2\alpha - Q^2 \sin^2\alpha = (P^2 \cos^2\alpha + Q^2 \sin^2\alpha) \cos 2\omega;$$

povyšíme-li obě strany na druhou mocnost, a užijeme při tom hodnoty

$$\cos^2 2\omega = \frac{a^2w^2 - 1}{a^2w^2},$$

vyjde po redukci

$$(P^2 \cos^2\alpha + Q^2 \sin^2\alpha)^2 = P^2Q^2 c^2w^2,$$

z čehož odmocněním plyne

$$(\gamma) \qquad P^2 \cos^2\alpha + Q^2 \sin^2\alpha = \varepsilon cw\, PQ, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Tu jest

$$P^2 \cos^2\alpha + Q^2 \sin^2\alpha = u^2(1 + cw)^2 + v^2(1 - cw)^2 \\ - 2uv(1 - c^2w^2) \cos 2\alpha,$$

$$PQ = u^2(1 + cw)^2 - v^2(1 - cw)^2,$$

takže rovnice ($\gamma$) zní

$$u^2(1 + cw)^2 (1 - \varepsilon cw) + v^2(1 - cw)^2 (1 + \varepsilon cw) \\ = 2uv(1 - c^2w^2) \cos 2\alpha.$$

Kdyby bylo $\varepsilon = 1$, krátila by se rovnice činitelem $1 - c^2w^2$, a zbyla by rovnice

$$(Q) \qquad u^2(1 + cw) + v^2(1 - cw) = 2uv \cos 2\alpha,$$

jež charakterisuje konoid (5*) v nové soustavě.

Pro plochu ($V$) je tedy $\varepsilon = -1$, a její rovnice jest

$$u^2(1 + cw)^3 + v^2(1 - cw)^3 = 2uv(1 - c^2w^2) \cos 2\alpha. \qquad (23)$$

Volme na př. $\alpha = 45^0$, a stanovme opsaný kužel, jehož vrchol leží na $\delta_1$ ($\xi = \xi_0$, $\eta = 0$, $z = -c$); rovnice po substituci $1 - cw + u\xi_0 = 0$ se redukuje na stupeň 3. a zní

$$\left(u + \frac{2}{\xi_0}\right)^3 = uv^2;$$

je to rovnice stopy kužele opsaného z bodu na přímce $\delta_1$, jenž je 3. třídy; dvojná přímka jest

$$u = -\frac{2}{\xi_0}, \quad v = 0,$$

t. j. vychází z bodu $\xi = \frac{1}{2}\xi_0$ na $O\xi$ a je rovnoběžná s $O\eta$; je to tečna inflexní s dotykovým bodem úběžným.

Substituce

$$\left(\frac{u + \frac{2}{\xi_0}}{u}\right)^3 = \left(\frac{v}{u}\right)^2 = t^6$$

vede na parametrické vyjádření

$$\xi - \frac{\xi_0}{2} = -\frac{\xi_0 t^2}{6}, \quad \eta = -\frac{\xi_0}{3t},$$

a na rovnici v obyčejných souřadnicích

$$\left(\xi - \frac{\xi_0}{2}\right)\eta^2 + \tfrac{1}{54}\xi_0^3 = 0,$$

takže čára má úvrat v úběžném bodě osy $O\xi$.

---

Rovnice (22) vyjadřuje jednoduchou metrickou vlastnost konoidu, předpokládáme-li $\alpha = 45^0$; zní

$$\left(\frac{c + z}{c - z}\right)^3 = \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2. \tag{22a}$$

Levá strana je trojmoc dělicího poměru roviny kolmé na osu $Oz$ vůči rovinám kuspidálním $z = \pm c$, pravá strana je čtverec tangenty úhlu, jejž rovina vedená bodem a osou $Oz$ svírá s rovinou $\xi Z$. Tento konoid je zvláštní případ přímkových ploch 5. stupně určených rovnicí

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^3 = \left(\frac{R}{S}\right)^2,$$

kde $P$, $Q$, $R$, $S$ jsou lineární výrazy.

Konoid orthogonální $(V)(\alpha = 45^0)$ lze parametricky vyjádřiti takto — viz (22ª) —

$$x = u(1 - v)^{\frac{3}{2}}, \quad y = u(1 + v)^{\frac{3}{2}}, \quad z = cv,$$

kde parametry $u$, $v$ mají význam zřejmý. Pro přímý konoid vyjádřený rovnicemi

$$x = u\varphi(v), \quad y = u\psi(v), \quad z = cv$$

jsou asymptotické čáry určeny vztahem *)

$$u^2 = \frac{\text{konst.}}{\varphi(v)\,\psi'(v) - \psi(v)\,\varphi'(v)}.$$

V našem případě

$$\varphi(v) = (1 - v)^{\frac{3}{2}}, \quad \psi(v) = (1 + v)^{\frac{3}{2}}$$

máme

$$\varphi(v)\,\psi'(v) - \psi(v)\,\varphi'(v) = \varphi(v)\,\psi(v) \cdot \frac{3}{1 - v^2} = 3\sqrt{1 - v^2},$$

a čáry asymptotické jsou dány rovnicí parametrickou

$$u^2 = \frac{Cc^2}{\sqrt{1 - v^2}},$$

a odtud plyne

$$xy = C(c^2 - z^2),$$

kde $C$ je libovolná veličina stálá. Vlastně třeba tu psáti $\xi$, $\eta$ jako souřadnice, takže asymptotické čáry konoidu (22[a]) se jeví jako průsečnice s hyperboloidy přímkovými

$$\xi\eta = C(c^2 - z^2), \tag{22$^b$}$$

jichž rovnice po návratu k původní soustavě souřadnic zní

$$x^2 - y^2 + C(z^2 - c^2) = 0. \tag{22$^c$}$$

Hyperboloidy ty tvoří svazek, jehož jedna plocha sestává z dvojice rovin torsálních $z = \pm c$, a druhou plochu tvoří roviny spojující řídící přímky $\delta$, $\delta_1$ s osou $Oz$, takže hyperboloidy procházejí čtyřmi přímkami $z = \pm c$, $x \pm y = 0$.

Tytéž hyperboloidy stanoví asymptotické čáry na konoidu

$$\frac{y}{x} = \left(\frac{c + z}{c - z}\right)^n,$$

kde $n$ je libovolná konstanta. Projektivním zobecněním obdržíme větu:

---

*) Asymptotické čáry na přímém konoidu a t. d. Časopisu roč. XLII, str. 1. (1912).

„*Asymptotické čáry přímkové plochy*

$$\frac{R}{S}=\left(\frac{P}{Q}\right)^n$$

(kde $n$ je libovolná konstanta a $P$, $Q$, $R$, $S$ lineární výrazy) *jsou na ní vyťaty svazkem hyperboloidů procházejících čtyřmi přímkami, v nichž se roviny* $P=0$, $Q=0$ *protínají s rovinami* $R=0$ a $S=0$."

K podrobnému seznání asymptotických čar na konoidu (22[a]) dospějeme takto: nahraďme parametry $v$ a $u$ novými $\varphi$ a $\nu$,

$$v=\cos 2\varphi,\quad \frac{\nu}{u}=\text{konst.},$$

takže $z=c\cos 2\varphi$; obdržíme tak

$$\xi=\nu\sin^3\varphi,\quad \eta=\nu\cos^3\varphi,\quad \nu=\frac{\text{konst.}}{\sqrt{\sin 2\varphi}}.$$

Tu vypadne irracionalita, zavedeme-li parametr $t$ substitucí

$$\operatorname{tg}\varphi=t^2,$$

a vyjde

$$\xi=\frac{Ct^5}{1+t^4},\quad \eta=\frac{C}{t(1+t^4)},\quad z=c\frac{1-t^4}{1+t^4},$$

kteréžto rovnice charakterisují asymptotické čáry na orthogonálním konoidu ($V$) jako racionální čáry stupně šestého; $C$ značí libovolnou stálou, při čemž lze voliti současně za $C$ a $t$ též ryze pomyslné hodnoty.

Zbývá ještě vyšetřiti asymptotické čáry na konoidu ($V$) v případě $\alpha \gtrless 45^0$. Rovnice přímého konoidu (a vůbec konoidu, jehož osa jest přímka $Oz$, i když souřadnice nejsou pravoúhlé) má tvar

$$(\mathfrak{K})\qquad F(x, y, z)=0,$$

kde levá strana je homogenní vůči $x$ a $y$. Asymptotické čáry jsou dány rovnicí

$$x^2\frac{dt}{dz}=C,\quad t=\frac{y}{x}.$$

Klademe-li v ($\mathfrak{K}$) $y=tx$ a differencujeme při stálém $x$, máme

$$\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}x\frac{dt}{dz}=0;$$

odtud plyne rovnice asymptotických čar ve tvaru

$$(\mathfrak{A}) \qquad \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{C}{x}\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Vložíme-li sem hodnotu

$$y\frac{\partial F}{\partial y} = -x\frac{\partial F}{\partial x},$$

obdržíme výsledek symetričtější

$$(\mathfrak{A}^*) \qquad 2xy\frac{\partial F}{\partial z} = C\left(x\frac{\partial F}{\partial x} - y\frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Užije-li se této rovnice u konoidu (22), obdržíme pro asymptotické čáry další rovnici

$$\xi\eta\,[\xi^2(z+c)^2 + \eta^2(z-c)^2 + 2\xi\eta(z^2 - \tfrac{1}{3}c^2)\cos 2\alpha]$$
$$= C[\xi^2(z+c)^3 - \eta^2(z-c)^3],$$

která definuje svazek ploch šestého stupně naše čáry na konoidu $(V)$ vytínající.

Plocha tato má dvojné přímky $\delta$, $\delta_1$, $Oz$ a úběžnou přímku roviny základní; s plochou $(V)$ má mimo to společné přímky úběžné rovin $x \pm i\,y = 0$; průseč obou ploch obsahuje tedy stálé přímky, a sice jsou

4 + 4 soustředěny v přímkách $\delta$, $\delta_1$
4 „ v $Oz$
6 „ v úběžné přímce roviny základní,
2 splývají s uvedenými pomyslnými přímkami úběžnými.

Čáry asymptotické nejsou tedy stupně vyššího než $5 \times 6 - 20 = 10$.

---

# O přímočarosti světelných paprsků a vztahu mezi zákonem Newtonovým a Euklidovou geometrií.

Prof. Dr. **Arnošt Dittrich** v Třeboni.

O geometrii a jejím významu existuje celé spektrum názorů. Pod vlivem Herodotovým ujalo se již v klasickém starověku mínění, že geometrie vznikla v Egyptě, odkud se jako na-