

František Hanuš

O rovnici stupně čtvrtého

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 18 (1889), No. 1, 32--34

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122417>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1889

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## O rovnici stupně čtvrtého.

Žákům středních škol píše

F. Hanuš,

asistent mineralogie při české vys. škole technické v Praze.

Budiž

$$(1) \quad x^4 - \varphi_1 x^3 + \varphi_2 x^2 - \varphi_3 x + \varphi_4 = 0$$

rovnice stupně čtvrtého mající kořeny  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , v níž lze  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  pokládati za základní souměrné úkony liter  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , takže je lze uvést na tvar

$$\varphi_1 = (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4)$$

$$\varphi_2 = x_1 x_2 + x_3 x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$$

$$\varphi_3 = x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 + x_2)$$

$$\varphi_4 = x_1 x_2 \cdot x_3 x_4.$$

Zavedeme-li pak označení

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= y_1, & x_3 + x_4 &= y_2, \\ x_1 x_2 &= z_1, & x_3 x_4 &= z_2, \\ z_1 + z_2 &= u, \end{aligned}$$

bude lze tyto rovnice psáti jak následuje:

$$(3) \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = \varphi_1 \\ y_1 y_2 = \varphi_2 - u \\ z_1 y_2 + z_2 y_1 = \varphi_3 \\ z_1 z_2 = \varphi_4. \end{cases}$$

Z prvních dvou rovnic této soustavy plyne, že  $y_1, y_2$  jsou kořeny rovnice druhého stupně

$$(4) \quad y^2 - \varphi_1 y + \varphi_2 - u = 0.$$

Vypočteme-li odtud  $y_1, y_2$ , a dosadíme-li do třetí z rovnic (3), obdržíme po odstranění odmocnin rovnici, v níž se vyskytuje pouze  $u$  a veličiny známé. K témuž cíli dospějeme však také následující cestou. Povyšením obou stran zmíněné rovnice na druhou mocnost vznikne

$$\varphi_3^2 = z_1^2 y_2^2 + z_2^2 y_1^2 + 2z_1 z_2 \cdot y_1 y_2,$$

aneb vzhledem k rovnicím (3)

$$(5) \quad \varphi_3^2 = z_1^2 y_2^2 + z_2^2 y_1^2 + 2\varphi_4(\varphi_2 - u).$$

Z rovnice (4) pak soudíme, že

$$y_1^2 = \varphi_1 y_1 + u - \varphi_2,$$

$$y_2^2 = \varphi_1 y_2 + u - \varphi_2,$$

čímž rovnice (5) obdrží tvar

$\varphi_3^2 = \varphi_1(z_1^2 y_2 + z_2^2 y_1) + (u - \varphi_2)(z_1^2 + z_2^2) + 2\varphi_4(\varphi_2 - u)$   
 čili vzhledem k rovnici  $z_1 + z_2 = u$ ,

$$(6) \quad \varphi_3^2 = \varphi_1(z_1^2 y_2 + z_2^2 y_1) + (u - \varphi_2)(u^2 - 4\varphi_4).$$

Z třetí rovnice soustavy (3) plyne

$$z_1^2 y_2 = z_1 \varphi_3 - z_1 z_2 y_1 = \varphi_3 z_1 - \varphi_4 y_1,$$

$$z_2^2 y_1 = z_2 \varphi_3 - z_1 z_2 y_2 = \varphi_3 z_2 - \varphi_4 y_2,$$

takže máme

$$z_1^2 y_2 + z_2^2 y_1 = \varphi_3 u - \varphi_4 \varphi_4,$$

čímž rovnice (6) přejde v tuto

(7)  $u^3 - \varphi_2 u^2 + (\varphi_1 \varphi_3 - 4\varphi_4)u - [\varphi_3^2 - \varphi_4(\varphi_1^2 - 4\varphi_2)] = 0$ ,  
 kterážto rovnice stupně třetího slouží k stanovení hodnoty  $u$ .

### Poznámka k článku předcházejícímu.

Napsal

**Matyáš Lerch,**

docent při České vysoké škole technické v Praze.

Pan kollega Hanuš dospěl k resolventě (7) samostatně jakožto abiturient, aniž znal řešení odjinud. Resolventa tato shoduje se s onou, již podal Ferrari, avšak způsob odvození jest jiný, a třeba by řešení rovnic stupně 4. bylo dnes úkolem naprosto hotovým, považují nicméně za vhodné, tuto metodu uveřejniti, ana vyniká jednoduchostí principu.

Aby řešení rovnice (1) bylo dovedeno ku konci, dlužno ještě ustanoviti, jak lze z kořenů resolventy (7) určití kořeny rovnice (1).

Především poznamenejme, že nahradíme-li v třetí rovnici soustavy (3) veličiny  $y_2, z_2$  hodnotami  $\varphi_1 - y_1, \frac{\varphi_4}{z_1}$ , vznikne rovnice lineární vzhledem k  $y_1$ , z níž plyne řešením

$$(8) \quad y_1 = \frac{z_1(\varphi_1 z_1 - \varphi_3)}{z_1^2 - \varphi_4}.$$

Z rovnic  $z_1 z_2 = \varphi_4, z_1 + z_2 = u$  však plyne, že  $z_1, z_2$  jsou kořeny rovnice

$$(9) \quad z^2 - uz + \varphi_4 = 0;$$

tu je pak zřejmo, že veličina  $z$  připouští 6 hodnot, ano  $u$  jest jakožto kořen rovnice kubické veličinou trojznačnou. Že tomu skutečně tak, plyne odtud, že existuje 6 amb  $x_\alpha x_\beta$ , z nichž

každé možno voliti za  $z_1$ . Pak ale odpovídá každému  $z_1$  jediné  $y_1$ , které se určí vzorcem (8).

Z rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= y_1, & x_3 + x_4 &= \varphi_1 - y_1, \\x_1 x_2 &= z_1, & x_3 x_4 &= \frac{\varphi_4}{z_1}\end{aligned}$$

pak plyne, že  $x_1, x_2$  jsou kořeny rovnice

$$x^2 - y_1 x + z_1 = 0,$$

a  $x_3, x_4$  kořeny rovnice

$$x^2 - (\varphi_1 - y_1) x + \frac{\varphi_4}{z_1} = 0.$$

Máme tedy následující výsledek: Značili  $u$  kterýkoli z kořenů resolventy

(3)  $u^3 - \varphi_2 u^2 + (\varphi_1 \varphi_3 - 4\varphi_4) u - [\varphi_3^2 - \varphi_4 (\varphi_1^2 - 4\varphi_2)] = 0$ ,  
z kterýkoli z obou kořenů rovnice

$$(9) \quad z^3 - uz + \varphi_4 = 0,$$

budou kořeny rovnic

$$x^2 - yx + z = 0, \quad x^2 - (\varphi_1 - y) x + \frac{\varphi_4}{z} = 0,$$

[kde  $y = \frac{\varphi_1 z^2 - \varphi_3 z}{z^2 - \varphi_4}$ ], zároveň kořeny rovnice bikvadratické

$$x^4 - \varphi_1 x^3 + \varphi_2 x^2 - \varphi_3 x + \varphi_4 = 0,$$

kde  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  jsou libovolné veličiny konečné.

Je velmi zajímavo porovnat tento výsledek s ostatními způsoby řešení rovnic bikvadratických, najmě s methodou *Lagrangeovou*, o níž čtenář nalezne bližšího a snadně přístupného vysvětlení v článku p. prof. *Ed. Weyra* v XI. roč. Čas. (pod pseudonymem *M. R.*), kde zároveň probrány jsou rovnice stupně 2. a 3. S jiné stránky zajímavé jsou dva způsoby řešení prostředkem zvláštních tvarů determinantních, které v XIII. a XIV. roč. Čas. podali pp. *Studnička* a *Le Paige*.