Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Otakar Ježek

Příspěvek ku zkrácenému počítání. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 1, 17--21

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122424`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1889

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

$$x_2 = -g \frac{\cos\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Je-li $\frac{q}{p} = h < 0$, je znaménko absolutně většího kořene kladné, opačně v případě $\frac{q}{p} > 0$. Realnost pomocného úhlu vyžaduje v souhlasu s odstavcem 6. a 7., by p a r byla opačného znaménka.

Uvedené řešení plyne též z odstavců 6. a 7. jednoduchou substitucí za

$$m = \frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} \text{ v případě } \gamma) \text{ a } m = \frac{\cos\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} \text{ v případě } \delta).$$

Dle toho, je-li

$$\cot^2\frac{\varphi}{2} \lesseqgtr 2,$$

máme buď případ γ) neb δ).

Příspěvek ku zkrácenému počítání.

Sepsal

Otakar Ježek,

s. professor real. gymnasia na Smíchově.

I.

Účelem této stati jest řešiti úlohu:

„Stanovme druhou a třetí mocnost desetinného čísla buď úplného buď neúplného až na jednu jednotku daného řádu přesně buď nadbytkem neb nedostatkem."

Úloha tato po mém vědomí dosud řešena nebyla a sice nejspíše z důvodů dvou. Učebnice pro školy střední, kde předem by byla na místě, jí neobsahují, ježto instrukce z příčin didaktických nepřejí zkrácenému počítání, pokud by přesahovalo dělení; praktický počtář pak, maje mocniti, zajisté sáhne k tabulkám logarithmickým. Přece však myslím, že řešení této úlohy není prací zbytečnou, ježto, přihlížíme-li ku zkrácenému počítání jako celku, vyplňuje citelnou mezeru.

Serret na př. ve svém spise „Traité d'arithmetique", kde po mém zdání o zkráceném počítání nejdokonaleji jest pojednáno, o mocnění čísel dekadických jako zvláštním početním úkonu vůbec nejedná, čímž arci odpadla i nutnosť řešiti úlohu v čele této stati vytčenou. Ježto však jedno neb dvoje, byť i zkrácené násobení zabere více času, než použiti běžných pravidel pro stanovení druhé i třetí mocnosti, jest prospěšnosť zvláštního způsobu, který by výhody zkráceného počítání s výhodou vytknutých pravidel spojoval, tuším na bíledni. Také jiná velmi oblíbená kniha, Balzerovy: „Elemente der Arithmetik" v tomto směru nevyhovují. Jednak se v tomto spise vůbec ku přesnému stanovení chyby nepřihlíží, jinak ale i pravidlo uvedené pro zkrácené stanovení druhé mocnosti jest dosti těžkopádné, o zkráceném počítání třetí mocnosti se pak autor ani nezmiňuje. By nabyl výklad jasnosti, chci na příkladě voleném z citovaného již spisu Serret-ova způsob počítání mnou navrhovaného objasniti.

II.

Budiž úlohou stanoviti druhou mocnosť úplného čísla desetinného

$$\pi = 3{,}14159263589793238 46\ldots$$

na 0,00001 přesně."

Počet míst, jež z čísla π nutno voliti, ustanovíme dle následujícího pravidla:

„Chceme-li obdržeti ve čtverci daného nekonečného desetinného zlomku m cifer přesných,*) stačí voliti z onoho čísla buď (m+1) neb (m+2) cifer dle toho, má-li dané číslo na nejvyšším místě cifru větší než 1 čili nic. Správnosť této věty plyne z úvah, jež provádí Serret v citovaném již spise na str. 185.

V našem případě máme počítati na 0,00001; ježto pak π

*) Serret tímto výrokem vyrozumívá správnosť ($m-1$). cifry, kdežto m. cifra může býti proti správné cifře o jednu jednotku buď větší (excès) neb menší (défaut).

v celkách má pouze jednu cifru, máme počítati na sedm míst, stačí vzíti tudíž

$$\pi = 3{,}141592.$$

Bych označil výhody, jež se i při nezkráceném počítání druhé mocnosti zavésti dají, stanovím $3{,}141592^2$ a zvolím ve výsledku žádaný počet cifer, čímž zároveň nabudeme kontroly pro správnosť výsledku, zkráceným počítáním stanoveného. Za tím účelem násobme poslední cifrou 2 zbývající číslo 3,14159, sousední cifrou na levo ku 2, t. j. 9 zbývající číslo 3,1415 atd. Každý takto stanovený součin pišme o 2 místa dále na levo pod předcházející. Součet všech součinů násobme dvaceti a oddělme ve výsledku 12 míst desetinných.*) K tomuto číslu přičtěme pak číslo utvořené tím způsobem, že čtverce všech cifer daného čísla položíme vedle sebe v témž pořádku, v jakém cifry v daném čísle za sebou jdou, při čemž za čtverce čísel 3, 2, 1, 0, dlužno vzíti čísla 09, 04, 01, 00. Tato poslední úmluva má též za následek, že platí obecně výrok: mají-li celky daného čísla k cifer, budou jich celky právě ustanoveného čísla míti $2k$, při čemž arci po případě nejvyšším místem v levo bude nula.

Konečně budiž podotčeno, že po krátkém cviku výše zmíněné sečítání všech součinů a násobení součtů dvěma v jednom provésti lze. Bude tudíž výpočet v našem případě následující:

$$\begin{array}{r}
\underline{3{,}141592^2} \\
628318 \\
282735 \\
15705 \\
314 \\
124 \\
\underline{3} \\
0{,}85799903636 \\
\underline{(0)9{,}011601258104} \\
9{,}869600294464.
\end{array}$$

Na 0,00001 přesně bude tudíž π^2 nedostatkem 9,86959, nadbytkem 9,86961.

Bychom nyní stanovili druhou mocnosť čísla π na 0,00001

*) Obecně: Má-li dané číslo n desetinných míst, nutno v právě stanoveném čísle odděliti $2n$ míst.

přesně zkráceným počítáním, stanovme především v čísle 3,141592 cifru nejvyšší řadové hodnoty, která by s některou další cifrou násobena dávala součin řadové hodnoty 100kráte menší než jest žádaná. V našem příkladě jest to 1, jejíž řadová hodnota 0,1 násobena řadovou hodnotou cifry 2 t. j. 0,000001 dává skutečně 0,0000001.

Cifrou $\dot{2}$ pak násobme číslo $3\dot{1}$, sousední cifrou ku 2 k levé ruce t. j. 9 násobme číslo 314, sousedním číslem ku 9 t. j. 5 číslo 3141, a tak pokračujme až dojdeme součinu, jehož násobitel a poslední cifra násobence v daném čísle buď přímo vedle sebe stojí aneb pouze jednou cifrou odděleny jsou. Součin tento jest posledním, jehož řadová hodnota jest stokráte menší žádané. Všechny takto stanovené součiny píšeme jako při zkráceném násobení pod sebe. Další součiny, jichž násobitelé jsou jako v předešlých součinech vždy cifrou sousední na levo k předešlému násobiteli v daném čísle, jichž násobence ale jako při nezkráceném mocnění stanovíme, píšeme vždy o dvě místa na levo, vyjímaje onen součin, jehož násobitel by byl cifrou sevřenou poslední cifrou násobence a příslušným násobitelem. Součin tento by se psal pouze o jedno místo na levo. Nyní opět utvoříme součet všech těchto součinů, násobíme jej dvěma a oddělíme ve výsledku patrně 7 míst. Z čísla utvořeného jako při nezkráceném počítání ze čtverců daných cifer vezmeme arci jen nutný počet cifer, při čemž počet cifer celků snadno dle uvedeného již pravidla stanovíme.

Bude tedy počet nyní následující:

$$\begin{array}{r}
3,\dot{1}41592\dot{2}^2 \\
\hline
62 \\
2826 \\
15705 \\
314 \\
124 \\
3 \\
\hline
0,8579986 \\
9,0116012 \\
\hline
9,8695998.
\end{array}$$

Kdyby volené číslo 3,1415$\dot{9}$2 bylo konečným desetinným číslem, stačilo by nyní potlačiti poslední dvě místa ve výsledku a zvýšiti třetí číslo od konce o jednu jednotku; číslo takto stanovené by bylo až na 0,00001 přesně nadbytkem nebo nedostatkem žádaný čtverec. Tento poslední výrok objasníme, ustanovíme-li chybu, jíž jsme se při tomto počítání dopustili; při prvním násobení obnáší chyba patrně méně než 0,0000002,

při druhém	„ „ 0,0000009,
při posledním	„ „ 0,0000005.
celkem tedy	méně než 0,0000016,

Násobením dvěma vzroste chyba na 0,0000032 a zanedbáním cifer v čísle utvořeném ze čtverců zvětší se o 0,000001, tak, že celková chyba obnáší 0,0000033; celkem jest tedy chyba $<$ 0,00001. Z toho pak plyne jako při zkráceném násobení desetinných čísel konečných správnosť výše vytknutého výroku. Kdyby v daném čísle za cifrou 2 byly následovaly cifry, jimiž by se tedy vůbec nebylo násobilo, tu by chyba vzrostla ještě o 0,000004 $\times$ 2, ježto dané číslo jest menší než 4, a číslo zanedbáním oněch cifer vzniklé by bylo menší než 0,000001.

Vrátíme-li se nyní k našemu příkladu, kde jest dané číslo nekonečným desetinným zlomkem, musíme podobně jako to činí Serret (l. c. pag. 188) stanovenou chybu ku výsledku přidati, čímž obdržíme 9,8696031, tak, že číslo 9,86961 čtvercem čísla π až na 0,00001 přesně buď nadbytkem nebo nedostatkem stanoveno míti musíme.

Poznámka. Kdyby chyba, kterou jak patrno již před počítáním ustanoviti lze, obnášela více než 100, musili bychom stanoviti ve zvoleném neúplném desetinném čísle cifru nejvyšší řadové hodnoty, která by s některou další cifrou násobena dávala součin řadové hodnoty 1000kráte menší než jest žádaná.

(Dokončení.)

Poznámka k substituci Landenově.

Napsal

Dr. František Koláček,

professor v Brně.

Ač zmíněná substituce, jsouc podřízeným členem transformace všeobecnější, svůj theoretický význam do jisté míry pozbyla, ne-