Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

O některých integrálech omezených

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 1, 32--36

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122509`

O některých integrálech omezených.

Podává

M. Lerch,
prof. ve Freiburku Švýcarském.

Vzorec

$$(1)\quad \int_{u+w}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2-2uw} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{w \cos 2ux - x \sin 2ux}{w^2 + x^2} dx$$

lze takto dokázati. Položme

$$f(u) = e^{-2uw} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{w \cos 2ux - x \sin 2ux}{w^2 + x^2} dx,$$

a differencujme vůči u dle známého pravidla; tak vyjde nejprve

$$f'(u) = -2e^{-2uw} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{w^2 \cos 2ux - wx \sin 2ux}{w^2 + x^2} dx$$

$$-2e^{-2uw} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{wx \sin 2ux + x^2 \cos 2ux}{w^2 + x^2} dx$$

a tedy po sečtení

$$f'(u) = -2e^{-2uw} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ux \, dx.$$

Jeden z nejznámějších vzorců počtu integrálního

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ux \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-u^2}$$

poskytne

$$f'(u) = -\sqrt{\pi}\, e^{-u^2-2uw},$$

z čehož plyne integrací

$$f(u) = \sqrt{\pi} \int_u^{\infty} e^{-x^2-2wx} dx = e^{w^2} \sqrt{\pi} \int_{u+w}^{\infty} e^{-z^2} dz,$$

poněvadž funkce $f(u)$ se blíží nulle, roste-li u do nekonečna; druhý tvar vznikl substitucí $z = x + w$.

Tím vzorec (1) dokázán.

Klade-li se $u = 0$, vyjde ze vzorce (1)

$$(2) \qquad \int_w^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2} \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{w dx}{w^2 + x^2}.$$

V rovnici (1) nelze klásti $w = 0$ (obě veličiny u a w původně byly předpokládány kladnými), i jest otázka, jak lze tu přejíti k mezím pro $w = 0$.

Tu užijeme nejprve rovnice $\cos 2ux = 1 - 2 \sin^2 ux$, čímž integrál se rozpadne ve dva:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \frac{w \cos 2ux - x \sin 2ux}{w^2 + x^2} = \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{w dx}{w^2 + x^2}$$

$$- \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{2w \sin^2 ux + x \sin 2ux}{w^2 + x^2} dx;$$

poslední integrál má pro $w = 0$ limitu

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\sin 2ux}{x} dx,$$

i zbývá jen vyšetřiti limitu integrálu

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \frac{w dx}{w^2 + x^2};$$

ta jest podle vzorce (2) rovna integrálu

$$\sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

a tedy bude v případě $w = 0$ vzorec (1) zníti

$$(3) \qquad \int_u^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\sin 2ux}{x} dx.$$

Z tohoto vzorce vychází

$$\sqrt{\pi}\int_{\frac{1}{\sqrt{v}}}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\infty} e^{-vx^2}\frac{\sin 2x}{x}dx\,;$$

rovnici tuto násobme na obou stranách $e^{-av}dv$ a integrujme od nully do nekonečna, takže

$$\sqrt{\pi}\int_0^{\infty} e^{-av}dv\int_{\frac{1}{\sqrt{v}}}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\pi}{2a} - \int_0^{\infty}dv\int_0^{\infty} e^{-v(a+x^2)}\frac{\sin 2x}{x}dx.$$

Přetvořme nejprve integrál v pravo. Ten lze psáti po změně pořádku integračního takto

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx\int_0^{\infty} e^{-v(a+x^2)}dv,$$

a poněvadž vnitřní integrace poskytne výsledek

$$\frac{1}{a+x^2},$$

bude hodnota tohoto integrálu dvojnásobného

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{x}\frac{dx^2}{a+x^2}.$$

Abychom pak přetvořili integrál na levé straně, t. j.

$$\int_0^{\infty} e^{-av}dv\int_{\frac{1}{\sqrt{v}}}^{\infty} e^{-x^2}dx,$$

uvažme, že to integrál dvojnásobný

$$\int\int e^{-av-x^2}dvdx,$$

jehož obor integrační dán jest podmínkami $vx^2 \geqq 1$, $x \geqq 0$. Poněvadž integrál ten jest absolutně konvergentní, nezávisí na pořádku integrace, i lze nejprve integrovati vůči v, takže máme výraz

$$\int_0^\infty dx \int_{\frac{1}{x^2}}^\infty e^{v^2 - uv} \, dv = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a}{x^2}} dx.$$

Tím způsobem nacházíme vztah

$$\frac{\sqrt{\pi}}{a} \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a}{x^2}} dx = \frac{\pi}{2a} - \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x} \frac{dx}{a + x^2}.$$

Integrál na levé straně stojící lze však vyčísliti. Užije-li se identity

$$x^2 + \frac{a}{x^2} = \left(x - \frac{\sqrt{a}}{x}\right)^2 + 2\sqrt{a},$$

obdrží se

$$\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a}{x^2}} dx = e^{-2\sqrt{a}} \int_0^\infty e^{-\left(x - \frac{\sqrt{a}}{x}\right)^2} dx$$

a zde substituce

$$x - \frac{\sqrt{a}}{x} = 2z$$

poskytne

$$x = z + \sqrt{z^2 + \sqrt{a}}, \quad dx = \frac{z + \sqrt{z^2 + \sqrt{a}}}{\sqrt{z^2 + \sqrt{a}}} dz,$$

takže náš výraz bude

$$e^{-2\sqrt{a}} \int_{-\infty}^\infty e^{-4z^2} \frac{z + \sqrt{z^2 + \sqrt{a}}}{\sqrt{z^2 + \sqrt{a}}} dz;$$

avšak tento výraz rozpadá se ve dva

$$e^{-2\sqrt{a}} \left\{ \int_{-\infty}^\infty e^{-4z^2} \frac{z dz}{\sqrt{z^2 + \sqrt{a}}} + \int_{-\infty}^\infty e^{-4z^2} dz \right\};$$

první z těchto dvou integrálů rovná se nulle, druhý má hodnotu $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ a tedy

$$\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a}{x^2}} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \, e^{-2\sqrt{a}};$$

následkem toho poslední výsledek bude zníti

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x} \frac{dx}{a+x^2} = \frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{2a} e^{-2\sqrt{a}};$$

píšeme-li

$$a = \frac{u^2}{4}, x = \frac{z}{2},$$

vyjde tvar pěknější

$$(4) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin z}{z} \frac{dz}{u^2+z^2} = \frac{\pi}{2u^2}(1 - e^{-u}).$$

Odtud vyvodí se další vzorec obsahující integrální logarithmus, násobí-li se du a integruje-li se od u do nekonečna. Tak vyjde nejprve

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{u}\, dx = \frac{\pi}{2u} - \frac{\pi}{2} \int_u^\infty e^{-z} \frac{dz}{z^2}.$$

Po částečné integraci máme

$$\int_u^\infty e^{-z} \frac{dz}{z^2} = \frac{e^{-u}}{u} - \int_u^\infty e^{-z} \frac{dz}{z} = \frac{e^{-u}}{u} + e^{-u} \log u - \int_u^\infty e^{-z} \log z\, dz$$

a tedy

$$(5) \qquad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{u}\, dx = \frac{1-e^{-u}}{u} - e^{-u} \log u + \int_u^\infty e^{-x} \log x\, dx.$$