Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Arnošt Dittrich

Jak třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava jimi daná dala se realisovati. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 1, 42--48

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122582`

ních par okolního vzduchu sraženého. V tomto případě je náboj zpravidla negativní. Při obyčejné výrobě pevné k. u. často můžeme pozorovati, že ze sukna pytlíku lze obdržeti elektr. jiskry až 2 *cm* délky, ale ovšem velmi slabé; náboj bývá positivní. Také kusy pevné k. u. po vyjmutí z pytlíku jeví na elektroskopu náboj positivní. Sloupečky značně komprimované k. u., jichž užíváme při provádění pokusů akustických stávají se třením velmi značně a trvale elektrickými, tak že jen tím lze je zbaviti elektrisace, že protáhneme je rychlým pohybem skrze plamen svíčky neb plynového hořáku. Bohužel schází dodnes systematické prozkoumání všech těchto elektrických zjevů, jakož i různých příčin, jež je začasté značně modifikují.

Poznámka. Všechny popsané pokusy byly několikráte vyzkoušeny, a daří se s bezpečností téměř naprostou. Proto bylo mi možno na „Třetím sjezdě čes. přírodozpytců a lékařů v Praze 1901“ v sezení sekce fysikální v čase poměrně velice krátkém celou řadu jich provésti. Ve příčině další literatury odkazuji na svůj obšírný referát „O fysikálních vlastnostech hmoty za velmi nízkých teplot“ v 30. ročníku tohoto časopisu str. 184.—204. a 245.—271. r. 1901.

Jak třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava jimi daná dala se realisovati.

Napsal

Arnošt Dittrich v Praze.

Následující úvahy vztahují se pouze na úlohy čistě mechanické, při nichž jde o pouhé pohyby. Sem náleží na příklad pohyby tuhého tělesa, tekutin nestlačitelných, soustavy bodů, jež se přitahují dle Newtonova zákona atd. Za zjevy čistě mechanické nelze pokládati ty, jež jsou na př. zároveň zjevy tepelnými jako zejména všechny pohyby spojené s třením, úlohy týkající se plynů, pružných těles, zjevů kapillarních.

Z uvedených příkladů jest patrno, že u zjevů čistě mechanických splněna následující podmínka.

Byla-li v prostoru, v němž se tělesa pohybují, v jistém okamžiku teplota stálá a v každém místě síla elektrická, magnetická, vektor světelný atd. roveň nulle, bude temperatura míti vždy a všude tutéž hodnotu, vektorové jmenovaní budou vždy rovnati se nulle.

Každý zjev, u něhož tato podmínka splněna není, nelze pokládati za zjev ryze pohybový. Těchto případů se následující věty netýkají.

Zjevy čistě mechanické jsou ovšem jen abstrakcí, která však jest oprávněnou, ponévadž mnoho úkazů v přírodě se vyskytujících lze s velikým přiblížením pokládati za zjevy pouze pohybové.

Abychom zjevy mechanické mohli popsati, zjednáme si jisté pojmy jako hmotný bod, specifická hmota, síla, vazba atd. Je-li pak dáno n hmotných bodů, síly a vazby, měříme-li čas rotačním uhlem země, určujeme-li polohu soustavy proti soustavě souřadnic, která se vzhledem ke stálicím nepohybuje, obdržíme differencialní rovnice pohyb této soustavy popisující pomocí nějakého principu na příklad d'Alembertova, který pro soustavy čistě mechanické má tvar

$$\sum_{1}^{n}{}^{\nu} [(m_\nu x_\nu'' - X_\nu)\, \delta x_\nu + (m_\nu y_\nu'' - Y_\nu)\, \delta y_\nu + (m_\nu z_\nu'' - Z_\nu)\, \delta z_\nu] = 0.$$

Jak Hertz v úvodu své mechaniky praví, nevedlo dosud stanovení pohybů pomocí d'Alembertova principu ke sporu se skutečností. Propočítáme-li totiž pohyb nějaké soustavy, kterou lze realisovati, můžeme se měřením na modelech přesvědčiti, že pohyb, až na tření, jež zanedbáme, nepatrné deformace tuhých těles, vliv zanedbaných sil kapillarních atd., děje se tak, jak jsme pomocí d'Alembertova principu předem stanovili. Poněvadž se dosud neobjevil žádný případ, kde by měření s výpočtem nesouhlasilo, považujeme princip d'Alembertův za správný. Můžeme však též propočítati pohyby soustav, jež nelze realisovati, neboť výrazy pro podmínky a síly nejsou ničím omezeny. Zvolíme-li jakékoliv výrazy za vazby, libovolné funkce času, souřadnic a rychlostí za síly, lze vlastnosti pohybu vždy pomocí d'Alembertova principu stanoviti, ale výpočet ten nemá žádný význam, poněvadž se pokusem o správnosti jeho přesvědčiti nemůžeme.

D'Alembertův princip jeví tedy jakousi nedokonalost, která záleží v tom, že poskytuje možnost propočítati pohyby soustav, jež nelze realisovati, a pochází z toho, že vazby a síly lze zvoliti zcela libovolně.

Jakmile si, co zde řečeno, uvědomíme, jest takřka samozřejmé, čím uvedenou vadu odstraníme. Vazby a síly nesmíme právě zvoliti libovolně, chceme-li, aby soustava dala se realisovati. Vazby a síly takových soustav omezeny jistými podmínkami.

Jde nyní o to podmínky ty vyhledati.

Než se však k této úloze obrátíme, všimněme si, že souhrn všech soustav, jež lze realisovati, můžeme rozděliti na dvě veliké třídy. Jedny soustavy, nazveme je v dalším úplné, lze realisovati beze všech obtíží. Takové soustavy jsou na př. tuhé těleso nepodlehající silám zevním, těžké tuhé těleso a země, soustava tuhých těles v tekutině nestlačitelné, soustava planet a slunce, kyvadlo a země atd. Druhou třídu soustav, nazveme je kusé, lze realisovati pouze tím, že realisujeme jistou soustavu úplnou, jejíž částí daná soustava kusá jest. Příkladem jsou zde těžké tuhé těleso o sobě, soustava planet bez slunce, kyvadlo samo o sobě atd.

Poměr kusých a úplných soustav lze snadno posouditi na základě uvedených příkladů. Soustavu kusou, kterou lze realisovati, můžeme vždy přibráním hmot, jež jsme dosud do soustavy nečítali, rozšířiti v soustavu úplnou.

Podaří-li se nám tedy vytknouti všechny možné úplné soustavy, jež lze realisovati, známe všechny takové vůbec možné soustavy. Kusé soustavy, jež lze realisovati, jsou v těchto úplných již obsaženy.

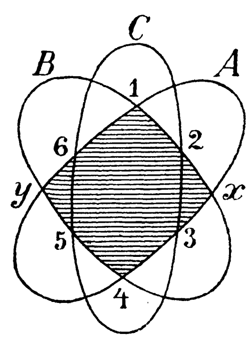
Úkol, o jehož řešení jde, lze tedy značně zjednodušiti. Třeba jen nalézti podmínky, jimž síly a vazby vyhověti musí, abychom obdrželi soustavu úplnou.

Kdyby se nám podařilo definovati zcela ostře a určitě soustavy úplné, byla by úloha ta řešena. Z definice té plynuly by totiž podmínky, jimž vazby a síly úplných soustav vyhovují. Každá soustava, jejíž vazby a síly by všem těmto podmínkám nehověly, nedala by se realisovati a každá, jež těmto podmínkám hoví, dala by se realisovati. Podmínky ty byly by nutné a dostačující.

Ale takový úspěch nelze očekávati, poněvadž soustavy úplné nemůžeme přesně definovati. Neboť tyto soustavy nelze přece definovati jinak, než tím, že udáme ty vlastnosti, jež soustava míti musí, aby náležela mezi úplné.

Tyto vlastnosti můžeme ale jen ze zkušenosti abstrahovati. Teprve, kdybychom tímto způsobem poznali všechny vlastnosti, mohli bychom pojem úplné soustavy ostře a určitě definovati. Z definice té plynuly by pak nutné a dostačující podmínky pro vazby a síly úplných soustav, jež lze realisovati. Poněvadž ale můžeme očekávati, že se nám podaří objeviti jen část těchto vlastností, obdržíme definici jen přibližnou a následkem toho podmínky sice nutné, ale ne dostačující. Každá soustava, jejíž síly a vazby podmínkám těm nehoví, nedá se realisovati; soustavy, jež lze realisovati, hoví podmínkám, ale ne každá soustava podmínkám těm hovící, dá se realisovati.

Co zde uvedeno, lze snad nahlédnouti též na jednoduchém grafickém znázornění.



Body roviny nechť znázorňují všechny možné soustavy, jež obdržíme, zvolíme-li vazby a síly zcela libovolně. Soustavy mající jistou vlastnost *a*, kterou mají všechny úplné soustavy (na př., že z nich nelze sestaviti stroj k produkování práce z ničeho), buďtež znázorněny body uvnitř křivky A ležícími. Soustavy s jinou takovou vlastností *b* znázorněme body uvnitř křivky B ležícími; soustavy mající vlastnost *a* i *b* zároveň buďtež znázorněny body na ploše křivkám A i B společné. Obdobně leží soustavy mající vlastnost *c* uvnitř křivky C tak, že ty, jež mají vlastnosti *a*, *b*, *c*, zároveň zobrazí se body ležícími na ploše křivkám A, B, C společné. Podobně dál pro vlastnost *d*, *e*, *f*, . . .

Dejme tomu, že úplné soustavy mají jen tři vlastnosti *a*, *b*, *c*. Pak budou soustavy ty znázorněny body uvnitř plochy 1, 2, 3, 4, 5, 6 ležícími.

Každá soustava daná bodem mimo tuto plochu nedá se realisovati; každá, jež zobrazena bodem uvnitř této plochy, může se realisovati.

Známe-li ale jen dvě z těchto tří vlastností na př. *a*, *b*, vytkneme pomocí nich jen soustavy uvnitř vyčárkované plochy 1, x, 4, y ležící. Každá soustava znázorněná bodem mimo 1, x, 4, y nedá se realisovati, poněvadž padne mimo plochu 1, 2, ..., 6. Ty soustavy, jež lze realisovati, padnou do obrazce 1, x, 4, y, poněvadž plocha 1, 2, ..., 6 jest částí této plochy; ale ne každý bod uvnitř 1, x, 4, y představuje soustavu, kterou lze realisovati. Neboť k těmto bodům náleží i ty, jež leží uvnitř. křivočarých trojúhelníků 2, x, 3 a 6, y, 5. Soustavy dané těmito body nelze však realisovati, poněvadž body je zobrazující padnou mimo plochu 1, 2, ..., 6.

Vraťme se nyní k vlastnostem úplných soustav. Vlastnosti ty nelze nalézti jinak než tím, že vyhledáme společné vlastnosti pokud možná velkého počtu úplných soustav.

Čtyři takové vlastnosti lze stručně vyjádřiti následujícími větami, jež obsah jejich jen naznačují:

1. Soustavu úplnou lze kdykoliv z jakékoliv polohy přenášeti do jiných poloh pošinutím a otočením.
2. Síly zevní závisí jen na souřadnicích.
3. Lze-li realisovati jistou úplnou soustavu, lze též realisovati každou soustavu shodnou; za jistých okolností jest pohyb shodné soustavy shodný s pohybem původní soustavy.
4. Soustavy úplné nelze použiti k produkování neomezeného množství práce.

Že některé z úplných soustav tyto vlastnosti mají, jest jisto. Předpokládejme v dalším, že uvedené věty platí o všech úplných soustavách. Platí-li opravdu, přijdeme k důsledkům, které zkušenost potvrzuje, neplatí-li, přijdeme ve spor se skutečností.

Důsledky ty vyvinuty pro jistý druh úplných soustav v dalších odstavcích. Věty uvedené vztahují se ale jen na úplné soustavy při zjevech čistě mechanických. Platnost těchto vět lze proto zkoumati jen na takových soustavách. Námitka, že na př. síly při tření závisí též na rychlostech, byla by zcela nemístní, poněvadž na takové soustavy se tyto úvahy nevztahují. Obdobně nezáleží na tom, že všechny ty věty neplatí o jistých soustavách kusých.

§ 1. *Některé poznámky stran označení.* V následujícím předpokládáme vždy, že soustava čítá n bodů; ν-tý bod má hmotu m_ν, souřadnice x_ν, y_ν, z_ν. Komponenty rychlosti a zrychlení jsou x_ν', y_ν', z_ν' resp. x_ν'', y_ν'', z_ν''. Vazeb budiž p, kde $p < 3n$; předpokládejme prozatím, že jsou funkcí všech souřadnic x_ν, y_ν, z_ν a času t

$$\varphi_\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n, t) = c_\pi, \pi = 1, 2, \ldots, p,$$

kde c_π jsou neurčité stálé.

Vlastně není tímto druhem vazeb rozmanitost všech možných zjevů mechanických vyčerpána. Vazby mohou býti též dány nerovností neb výrazy Pfaffovými. Hlavním případem jsou však přece jen ty, při nichž vazby mají tvar nahoře uvedený. Ovšem třeba podotknouti, že touto specialnou volbou vazeb omezena platnost všeho následujícího na ty úplné soustavy, jichž vazby dány řadou rovnic.

Abychom takové dlouhé výrazy jako φ_π stručně mohli vypsati, pišme místo $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pouze $f(x)$. Tohoto výhodného označení užito v dalším všude. Vazby lze pak psáti ve tvaru

$$\varphi_\pi(x, y, z, t) = c_\pi, \quad \pi = 1, \ldots, p,$$

a komponenty síly zevní na ν-tý bod působící budou

$$X_\nu(x, y, z), \; Y_\nu(x, y, z), \; Z_\nu(x, y, z),$$

poněvadž dle věty 2. předpokládáme, že síly zevní závisí jen na souřadnicích.

Poloha soustavy jest dokonale určena, je-li dána řada hodnot x_ν, y_ν, z_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, jež ovšem zvoleny tak, aby tyto veličiny hověly rovnicím $\varphi_\pi = c_\pi$.

Poloha soustavy určena souhrnem $3n$ veličin x_ν, y_ν, z_ν tak, jako soujemné číslo $z = x + iy$ svou realnou a imaginarní částí neb určitý bod prostoru a svými třemi souřadnicemi. Jako bod ten označujeme jedinou písmenou a, soujemné číslo jedinou litterou z, lze označiti též polohu soustavy jedinou písmenou na př. ϱ. Jde-li o to, určité hodnoty souřadnic blíže vytknouti, lze psáti $(x, y, z)\,\varrho$ neb $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\,\overline{\varrho}$ což značí, že poloha ϱ stanovena souřadnicemi x_ν, y_ν, z_ν, poloha $\overline{\varrho}$ hodnotami $\overline{x_\nu}$, $\overline{y_\nu}$, $\overline{z_\nu}$, kde $\nu = 1, \ldots, n$.

Že označení poloh jedinou písmenou jest výhodné, ukazuje se, jsou-li dvě polohy v nějaké souvislosti.

Vznikla-li na př. poloha $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\,\overline{\varrho}$ z polohy $(x, y, z)\,\varrho$ nějakým pošinutím a otočením, jest

$$\begin{aligned}\bar{x}_\nu &= a_1 x_\nu + a_2 y_\nu + a_3 z_\nu + a_0\\ \bar{y}_\nu &= b_1 x_\nu + b_2 y_\nu + b_3 z_\nu + b_0 \qquad \nu = 1,\ldots,n.\\ \bar{z}_\nu &= c_1 x_\nu + c_2 y_\nu + c_3 z_\nu + c_0\end{aligned}$$

Veličiny a, b, c jsou koefficienty orthogonalní substituce. Vzorci těmi dána šestičlenná, souvislá skupina transformací,*) jež ke každé své transformaci obsahuje inversní, kterou v dalším označíme písmenou S. Užijeme-li nyní označení poloh jedinou písmenou, lze řadu vypsaných vzorců nahraditi jedinou symbolickou rovnicí $\varrho S = \bar{\varrho}$, která praví, že poloha $\bar{\varrho}$ vznikla z polohy ϱ pošinutím a otočením S.

Skupina S vytvořena šesti na sobě nezávislými infinitesimalními transformacemi**)

$$V_1 f \equiv \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}, \quad V_2 f \equiv \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial f}{\partial y_\nu}, \quad V_3 f \equiv \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial f}{\partial z_\nu},$$

$$V_4 f \equiv \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial z_\nu} y_\nu - z_\nu \frac{\partial f}{\partial y_\nu}\right), \quad V_5 f \equiv \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} z_\nu - x_\nu \frac{\partial f}{\partial z_\nu}\right),$$

$$V_6 f \equiv \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial y_\nu} x_\nu - y_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right).$$

Že výrazy ty na sobě nezávisí značí, že nelze zvoliti od nully rozdílné stálé c_i tak, aby

$$\sum_1^6 {}_i c_i V_i f \equiv 0.$$

(Pokračování.)

*) *Scheffers,* „S. Lie, Vorlesungen über continuirliche Gruppen". Teubner, 1893. Str. 366. a násl., viz též 158. a násl.

**) *Scheffers,* „Lie, Continuirliche Gruppen". Str. 161. a následující, dále str. 403.