Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Arnošt Dittrich

Epicykl jako prostředek k ovládnutí libovolného pohybu periodického

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 3, 248--265

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122607`

Epicykl jako prostředek k ovládnutí libovolného pohybu periodického.

Napsal Dr. *Arnošt Dittrich.*

> ... *ὑπάρχειν τῷ μαθηματικῷ δεῖξαι τὰ φαινόμενα ἐν τῷ οὐρανῷ πάντα δὲ ὁμαλῶν καὶ ἐγκυκλίων κινήσεων ἀποτελούμενα, ...*
>
> Klaudia Ptolemaia, Almagest III. 1.[1])

Řekové neměli mechaniky nebeské, z níž by mohli čerpati vzorce pro pohyb těles nebeských. Jejich astronomie byla povahy ryze foronomické, totiž popisné. Počítali na periodičnost nebeských pohybů. Pak stačí pozorovati pohyb pro jednu periodu a lze předpovídati polohy budoucí i rekonstruovati polohy minulé pomocí rytmického se opakování pohybu.

K tomu by stačilo zachycení jediné periody pohybu graficky neb tabelárně na základě pozorování. Jsou-li v prostoru Aristotelo-Ptolemaiově, jenž jest tuho spojen se zemí, souřadnice planety X, Y, Z, musí býti graficky neb tabulkou dány tři periodické funkce času:

$$X = X(t), \qquad Y = Y(t), \qquad Z = Z(t), \tag{1}$$

kde každá z těchto funkcí času má vlastnost

$$F(t + kT) = F(t).$$

T jest periodou pohybu, k libovolné celé číslo.

Periodickou funkci lze za velmi širokých podmínek rozložiti v řadu Fourierovu. Zavedeme-li zkratku

$$\varphi = \frac{2\pi}{T} t,$$

lze psáti

$$X(t) \equiv \frac{1}{2} b_0 + \sum_{\nu}^{1\ldots\infty} [b_\nu \cos \nu\varphi + a_\nu \sin \nu\varphi],$$

$$Y(t) \equiv \frac{1}{2} B_0 + \sum_{\nu}^{1\ldots\infty} [B_\nu \cos \nu\varphi + A_\nu \sin \nu\varphi]. \tag{2}$$

Abychom se dostali do kolejí antické astronomie, nebudeme zkoumati průmět pohybu planetárního na jednotlivou osu, jak si vede naše mechanika nebeská, ale budeme si všímati průmětu po-

[1]) Heiberg „Syntaxis Mathematika.“ Teubner. 1898. Str. 208.

hybu na roviny souřadné. Průmět planety do roviny (X, Y) označíme písmenou w. Zároveň bude nám však písmena tato označením soujemného čísla, tak že

$$w = X + i\,Y; \quad i = \sqrt{-1}. \tag{3}$$

Soujemné číslo w, jež jest funkcí času, popisuje pohyb průmětu planety v rovině w, totiž v rovině (X, Y). Tuto soujemnou funkci lze přeměniti ze součtu cosinů a sinů

$$w = \frac{1}{2}(b_0 + i\,B_0) + \sum_{\nu}^{1\ldots\infty}[(b_\nu + i\,B_\nu)\cos\nu\varphi + (a_\nu + i\,A_\nu)\sin\nu\varphi],$$

pomocí relací Eulerových

$$\begin{aligned} 2\cos\nu\varphi &= e^{i\nu\varphi} + e^{-i\nu\varphi}, \\ 2\,i\sin\nu\varphi &= e^{i\nu\varphi} - e^{-i\nu\varphi}, \end{aligned} \tag{4}$$

na tvar:

$$w = c_0 + \sum_{\nu}^{1\ldots\infty}[c_\nu\,e^{i\nu\varphi} + c_{-\nu}e^{-i\nu\varphi}],$$

kde veličiny c jsou soujemné konstanty. Vzorec ten je volbou indexů již připraven ke stažení na jednoduchou formu

$$w = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu}\, c_\nu\,e^{i\nu\varphi},$$

kterou lze rozepsati na tvar

$$\begin{aligned} w = c_0 &+ c_1\,e^{i\varphi} + c_2\,e^{i2\varphi} + c_3\,e^{i3\varphi} + \ldots \\ &+ c_{-1}\,e^{-i\varphi} + c_{-2}\,e^{-i2\varphi} + c_{-3}\,e^{-i3\varphi} + \ldots \end{aligned}$$

Tento vzorec obsahuje rozbor libovolného pohybu periodického v rovině v nekonečný počet epicyklických kroužení. Velikost kruhů a počáteční polohy na nich určují konstanty c, jež se vypočítají z Fourierových konstant a, b, A, B. Tak jest na př.:

$$c_0 = \frac{1}{2}(b_0 + i\,B_0),$$

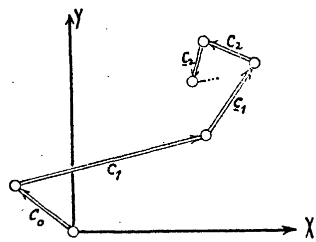
$$c_1 = \frac{1}{2}(A_1 + b_1 + i\,[B_1 - a_1]) \text{ atd.}$$

Soujemným číslem c_ν, jež vypíšeme v polárních souřadnicích tak že

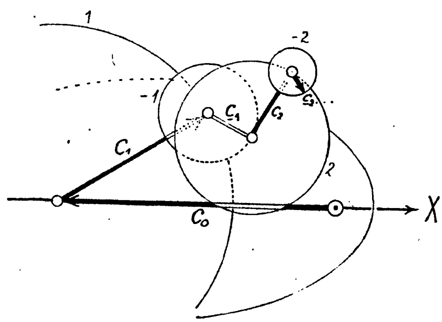
$$c_\nu = r_\nu\,e^{i\,\alpha_\nu}$$

dán poloměr r_ν epicyklu ν-tého. Úhel α_ν určuje polohu rotujícího vektoru v okamžiku $t=0$, t. j. $\varphi=0$. V prvém členu c_0 lze viděti Hipparchovu ideu exentričnosti, jež z hlediska našich rozborů jeví se jako přechodní případ mezi epicykly pravo a levotočivými.

Kroužení vlastní, skutečné, nekoná se tedy kol počátku, ale kol excentrického bodu c_0. Pro okamžik $t=0$ obdržíme polohu planety následujícím způsobem. (Viz obr. 1.) Z bodu c_0 vedeme vektor znázorňující v rovině (X, Y) co do směru i velikosti soujemné číslo c_1, k tomu geometrickým sčítáním připojíme vektor c_{-1}, k tomu vektor c_2 a c_{-2} atd. do nekonečna. Poloze planety blížíme



Obr. 1.



Obr. 2.

se po lomené spirále, jíž se sčítá konvergentní nekonečná řada soujemných čísel Σc_ν.

Hledáme-li polohu planety pro jiný čas t, necháme vektor c_1 otočiti se úhlovou rychlostí

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

po čas t o úhel

$$\varphi = \omega t$$

ve směru kladném, — od kladné poloosy X ke kladné poloose Y —, k němu připojíme vektor c_1 otočený o týž úhel ve směru opačném, dále připojíme vektor c_2, ale otočený o úhel 2φ, a vektor c_{-2} otočený o úhel -2φ atd. do nekonečna. (Viz obr. 2.)

Řekové nevěděli, že stačí, aby úhly, o něž se planeta za čas t na různých epicyklech otočí, tvořily řadu aritmetickou. Hledali hlavní epicykly, s volnými pohyby, a excentričnost jen zkusmo.

Vyjádřeme si pomocí soujemných čísel Hipparchovu teorii slunce, jak se nám zachovala u Ptolemaia.[2]) Pohyb slunce v pro-

[2]) Pro vniknutí do antické astronomie nestačí knižní zpracování v učebnících a spisech historických. Velmi mně posloužily studie klasického filologa, překladatele Ptolemaia, Manitia. Uveřejnil v Archenholdově „Weltallu“ řadu článků:

storu tuho se zemí spojeném vyjadřuje lineárná soujemná relace. Počátek je arci ve středu země. Periodou je tropický rok T, výstřednost činí 1/24, když poloměr kruhu slunečního učiníme jednotkou, mírou. Osa x míří do perihelia. Pak jest pohyb slunce dán soujemným číslem

$$w = e^{i\varphi} - \frac{1}{24}; \qquad \varphi = \frac{2\pi}{T} t. \tag{5}$$

Ptolemaios obšírně dokazuje, že tato hypotésa (excentrická) je rovnocenná s použitím epicyklu na koncentrickém kruhu. Pro nás toto dokazování odpadne, protože jsme si vědomi, že při sčítání vektorů neb soujemných čísel jest

$$a + b = b + a.$$

V terminologii teorie soujemných čísel musíme říci, že epicykl Hipparchův se netočí (vůči rovině souřadnic). Ptolemaios říká, že se točí (vůči průvodiči, jenž vodí epicykl po deferentu). Na tom oběhne za rok. Slunce na epicyklu — vůči průvodiči — otočí se též za rok, ale v opačném směru. Tím právě se dosáhne, že vektor od centra epicyklu ke slunci vedený nemění svůj směr vůči ose X. Ptolemaios odchylně od našich zvyklostí všímá si polohy vektoru $-1/24$ vůči pohyblivému vektoru $e^{i\varphi}$.

Ptolemaios stojí při posuzování pohybu epicyklu jaksi na stanovisku mechanika, jenž dělá mosazný model pro epicyklickou teorii Hipparchovu. Rameno deferentu, jež nese střed epicyklu se musí provrtat pro osu tohoto epicyklu! — Toto stanovisko mechanika zastírá pak Ptolemaiovi rovnocennost obou teorií, která pro nás jest jen elegantním příkladem na komutativnost vektorového sčítání. Při posuzování teorií myslí, že jde o: „buď — anebo!“, kdežto ve skutečnosti jde o: „nejen — nýbrž i!“. Na počátku 4. kapitoly knihy o slunci praví, že jedinou (jemu známou) anomalii lze vyjádřiti obojím způsobem. Že však bude logičtějším (εὐλογώτερον δ'ἂν εἴη), držíme-li se excentričnosti, že je jednodušší, protože vyjde s jedním pohybem, nikoliv se dvěma.

Rozdíl mezi $a+b$ vůči komutovanému $b+a$ není logický. Rozdíl jest na půdě psychologické. Lehčeji se apercipuje — a mechanicky provede —, že slunce kouží kol pevného bodu vně země,

„Fixsternbeobachtungen des Altertums“, IV., 251, 1903/4 a V., 14, 24, 399 1904/5. Na str. 399 a násl. je popis antických nástrojů úhloměrných. — „Sonnenbeobachtungen der Alten mit Hilfe von Schattenwerfern“ VI., 219. 241, 1905/6, projednává i skafé, krikos, armillu a kvadrant. „Hipparch's Theorie der Sonne nach Ptolemaeus“ VI., 323, 340, 1905/6. „Theorie des Mondes nach Ptolemaeus“, VIII., 1, 26, 45, 1907/8. „Die Parallaxen des Mondes und seine Entfernung von der Erde nach Ptolemaeus“, X, 29, 48, 63, 84, 1909/10. „Der Astronom Aristarch von Samos“ a „Die Schrift A. über die Grössen und Entfernungen d. Sonne u. d. Mondes“, XIX., 69, 137, 1918/19. Velmi poslouží Koperníkovo veledílo. Koperník píše tak krásně jako Ptolemaios — špatně.

než bychom k témuž kroužení kol země vektor — 1/24 rovnoběžně s osou X neustále připojovali. Řekové byli asi slabí co do názoru (vůči Indům na př., jak je viděti na charakteru geometrických důkazů obou národů). Tím si vykládám, že takovou maličkost, jako rovnocennost obou Hipparchových teorií tak podrobně dokazovali: Dokazovali totiž, že Hipparchův epicykl dává slunci 1) dráhu kruhovou, 2) excentrickou, 3) s hlavním kruhem shodnou. Proclus v „Hypotyposi“ (ed. Halma p. 91) sdílí, že staří matematikové s nekonečnou rozvláčností a úzkostlivostí přísný důkaz provedli.[3])

Teorie měsíční podává Ptolemaios dvě. Jednodušší vyjadřuje jen stáčení čáry apsid jediným epicyklem. Položíme-li poloměr koncentru kol země = 60, měří poloměr epicyklu 5 13/60 = 5·22. Epicykl oběhne koncentr za tropický měsíc $27^d\, 7^h\, 43^m$. Myslíme-li si s Ptolemaiem epicykl nasazený na otáčivý poloměr koncentru, oběhne Luna epicykl vůči tomuto poloměru za měsíc anomalistický $27^d\, 13^h\, 18^m$. Pohyb Luny dán pak soujemným číslem

$$w = 60\, e^{i\varphi} + 5{\cdot}22\, e^{i\psi}, \tag{6}$$

kde

$$\varphi = +13^\circ\, 10'\, 34''\, t, \qquad \psi = +6'\, 39''\, t.$$

Čas t vyjadřuje se ve dnech.

ψ-člen v soujemném čísle lze interpretovati také jako stáčení čáry apsid excentrického kruhu, jež se děje ve smyslu pohybu Luny rychlostí 6′ 39″ za den, t. j. kol dokola za 3248·1 dne, okrouhle za 9 let bez 39 dnů. Měsíc krouží pak na tomto volně se točícím excentru.

Složitější teorie Hipparchova u Ptolemaia respektuje evekci, změnu rychlosti měsíční, kterou způsobuje slunce svou přitažlivostí. Užívá epicyklu, jenž obíhá na kroužícím excentru. Ale nesouhlas pozorování a předpovědí[4]) z teorie vedl Ptolemaia k zavedení zvláštního kolísání epicyklu (πρόσνευσις), jež posouvá apogeem. Ve vzorcích tuto teorii vyjadřovati nebudu, protože porušuje epicyklický princip ještě v jiném směru, jak nejlépe viděti z následující kritiky Koperníkovy: „inaequalis est ergo epicycli motus in excentro suo, quem ipse describit. Quod si sic fuerit, quid respondebimus ad axioma, motum coelestium corporum aequalem esse, et nisi ad apparentiam inaequalem videri, si motus epicycli aequalis apparens, fuerit re ipsa inaequalis accidetque constituto principio at assumpto penitus contrarium.[5])

---

[3]) Manitius „Hipparchs Theorie der Sonne nach Ptolemaeus.“ Weltall VI. 342. 1905/6.

[4]) Manitius „Hipparchs Theorie des Mondes Ptolemaeus“. Weltall VIII. 29. 1907/8.

[5]) N. Copernici „De revolutionibus orbium coelestium“, Waršave, ed. Baranowski 1854. Str. 250.

Vychází z této teorie, že měsíc v 1. neb 3. čtvrti by měl býti dvakrát větší než úplněk či nov. Vyjádřeme si proto raději Koperníkovu teorii měsíce vzorci; ta je ryze epicyklická. Je rozšířením jednodušší teorie Ptolemaiovy, kterou jsme již vzorci vyjádřili. Proto můžeme začáteční členy převzíti změnivše jen poloměry dle způsobu Koperníkova. Klade na str. 274. citovaného vydání „Revolutionum" poloměr deferentu = 10.000. Hlavní epicykl má poloměr 1097, epi-epicykl 237. Úhlové rychlosti na deferentu a epicyklu lze převzíti z Ptolemaiova vyjádření. Pro syzygie dává totéž co teorie Koperníkova, až na to, že vzdálenost Luny od centra na deferentu měří u Koperníka 861 dílků, u Ptolemaia 867.

Čítejme úhly od kvadratury v apogeu kladně směrem běhu Luny. Jednotkou času jest opět den. Pak jest úhlová rychlost na deferentu vůči pozadí stálic $\omega_1 = +13^0\,10'\,34''$. Vůči poloměru, jenž epicykl vodí touto rychlostí po deferentu, úhlová rychlost centra epi-epicyklu $\omega_2 = -13^0\,3'\,53''$. Touto rychlostí krouží v něm poloměr nesoucí malý epi-epicykl. Vůči tomuto poloměru otočí se Luna na epi-epicyklu dvakrát za světelný měsíc, tak že od centra epicyklu je nejdál v kvadraturách, nejblíž v sydzygiích. (Revolutionum str. 253.) Úhlová rychlost jest $\omega_3 = +24^0\,22'\,57''$. Koperníkova teorie měsíce dá se tedy vyjádřiti v našich symbolech jediným řádkem

$$w = 10.000\, e^{i\varphi} + 1097\, e^{i\psi} + 237\, e^{i\chi} \tag{7}$$

kde

$$\varphi = \omega_1 t = +13^0\,10'\,34''\, t$$

$$\psi = (\omega_1 + \omega_2)\, t = +6'\,39\, t''$$

$$\chi = (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\, t = +24^0\,29'\,36''\, t.$$

Blíže k Laurentově řadě přijdeme, vyjádříme-li úhlové rychlosti pomocí (přibližné) nejmenší společné míry jejich $\omega = 6'\,39''$. Tak je

$$\varphi \doteq 119\,\omega t, \qquad \psi = \omega t, \qquad \chi \doteq 221\,\omega t.$$

Koperník pokládá tedy pohyb měsíční za periodický s přibližnou periodou 3248·1 dnů. Z rozvoje Laurentova k této periodě náležejícího stanoví empiricky 3 členy s největšími součinitely. Souhlas jeho teorie se skutečností je dokladem, že další členové jsou drobní.

Konstanty Laurentovy řady c_ν lze počítati také přímo, bez — nepatrné — okliky rozvojem Fourierovým. Lze užiti k stanovení jejich integrálů, jimiž se stanoví součinite c_ν v Laurentově řadě,

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{\nu}\, c_\nu z^\nu,$$

jež vyjadřuje soujemnou funkci w, regulérní v mezikruží, jež uzavírá jednotkový kruh.

Položíme-li

$$z = r e^{i\varphi},$$

vidíme, porovnávajíce s dřívějším rozvojem

$$w = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} c_\nu e^{i\nu\varphi},$$

že tento představuje horní soujemnou funkci na jednotkovém kruhu myšlené, pomocné roviny z, jejíž arkus

$$\varphi = \frac{2\pi}{T} t,$$

značí periodický ob čas T se vracející čas. Při tom volí se T za jednotku času tak, že perioda pohybu dána číslem 2π.

Protože tato funkce $w = f(z)$ je nám empiricky dána pro jednu periodu T, je nám dána i na jednotkovém kruhu pomocné roviny. Proto lze použíti k stanovení koeficientu Laurentova rozvoje relace

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int f(z)\, z^{-\nu-1}\, dz, \tag{8}$$

kde integrace vede se přes jednotkový kruh. Lze ji proto také psáti ve formě

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \, . \, z^{-\nu} \, . \, d\varphi.$$

Rozvoj ten bude aspoň ve velmi úzkém mezikruží kol jednotkového kruhu konvergentní. Jinak by nebylo Fourierova rozvoje, jehož existence jest jediné (skrovné) omezení, které Řekové ukládali pohybům nebeským, když předpokládali, že se najisto dají složiti z epicyklů.

Ostatně, třeba jen krok za krokem probrati v opačném pořadí důkazy, jimiž se Fourierův rozvoj odvozuje z Laurentova, aby bylo viděti, že rozvoj Fourierův zabezpečuje rozvoj Laurentův v našem případě.[6])

Jako příklad k těmto abstraktním úvahám provedeme rozebrání Keplerových eliptických pohybů planetárních v epicykly.

Počátek položíme do slunce, osu X namíříme k periheliu planety. (Viz obr. 3.) Průvodič její nazveme ϱ, odklon jeho od osy X měří úhel ψ, pravá anomalie, jenž roste s časem. Pak třeba v integrálech, jež určují c_ν, dosaditi

$$f(z) = \varrho e^{i\psi},$$

[6]) H. Burkhardt: „Theorie d. analityschen Funktionen.“ 49, 136, I. 1897.

kde ϱ a ψ jsou funkce času, jichž formu stanoví prvý a druhý zákon Keplerův.

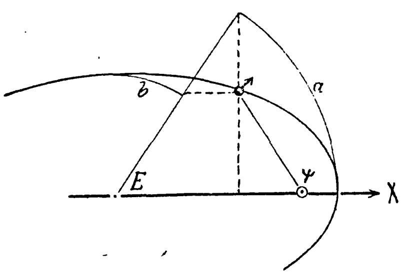
Vhodnější než přímé zavedení času jest zavedení excentrické anomalie E jako neodvisle proměnné. Tu ze známé konstrukce elipsy pomocí průvodiče od středu vedeného, jenž právě s osou X svírá úhel E, dostaneme z obrazce 3., že reálná část soujemného čísla $f(z)$

$$\varrho \cos \psi = a \cos E - c,$$

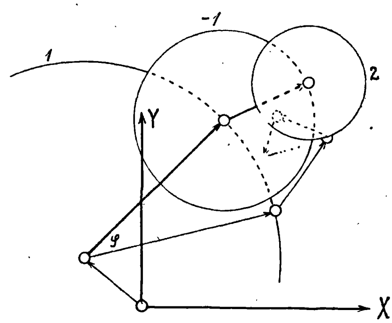
kdežto imaginární část

$$\varrho \sin \psi = b \sin E,$$

kde a jest velkou poloosou elipsy planetární, b malou, c lineárnou excentricitou. Jest pak



Obr. 3.



Obr. 4.

$$f(z) = a \cos E - c + i\, b \sin E,$$

kde E souvisí s časem Keplerovou rovnicí

$$\omega t = \varphi = E - \varepsilon \sin E;$$

ε jest numerická excentricita $c : a$.

Konstanty rozboru Keplerova eliptického pohybu v epicykly stanoví tedy relace

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [a \cos E - c + i\, b \sin E]\, e^{-i\nu\varphi}\, d\varphi,$$

$$\varphi = E - \varepsilon \sin E.$$

Úhel φ sluje v astronomii střední anomalií.

Vypočítejme si nejprve c_0. Pak jest

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [a \cos E - c + i\, b \sin E]\, d\varphi;$$

dosadíme za φ, čím zavedeme E jako odvisle proměnnou. Hranice se tím nemění; naroste-li střední anomalie z 0 do 2π, stane se totéž s excentrickou i pravou.

Je tedy vypočítati integrál

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [a\cos E - c + i\, b \sin E]\,[dE - \varepsilon \cos E\, dE].$$

Pro periodičnost sinu a cosinu zmizí 4 integrály ze součtu 6, jemuž horní jest roven. Zbude pak

$$c_0 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (a\,\varepsilon \cos^2 E + c)\, dE = -\frac{3}{2} c.$$

Střed epicyklického kroužení je tedy o $c/2$ pošinut za střed elipsy směrem k afheliu.

Když $\nu \neq 0$ skládá se c_ν z tří členů: jeden násoben velkou poloosou a, druhý malou b, třetí lineárnou excentricitou c. Tento člen zmizí pro jakékoliv ν. Zní totiž

$$-\frac{c}{2\pi}\int z^{-\nu-1}\, dz.$$

Ale tento integrál přes jakoukoliv uzavřenou křivku kol počátku dá nulu, když $\nu \neq 0$. (Burkhardt. I. 100.) Je tedy obecně pro $\nu \neq 0$.

$$c_\nu = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \,.\, \cos E\, e^{-i\nu\varphi} + \frac{i\,b}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \,.\, \sin E\, e^{-i\nu\varphi}, \qquad (9)$$

kde $$\varphi = E - \varepsilon \sin E.$$

Integrály závisí jen na ν a ε prostřednictvím Besselových funkcí.

Vyhledáme je nejprve pro prakticky důležitý případ, že ε je tak malé, že ε^2 a vyšší potence vůči němu mizí. Pak vidíme na Keplerově rovnici, že E a φ se jen velmi málo liší. Konstanty c_ν, pokud nezávisí na ε^2 a vyšších mocninách, lze snadno určiti pomocí Fourierova rozvoje.

Vyjdeme od výrazu

$$w = X + i\,Y = a\cos E - c + i\,b\sin E.$$

Rozvineme

$$\cos E = \cos(\varphi + \varepsilon \sin E) = \cos\varphi - \varepsilon \sin^2\varphi + \dots$$
$$\sin E = \sin(\varphi + \varepsilon \sin E) = \sin\varphi + \varepsilon \sin\varphi\cos\varphi + \dots$$

Členy při ε transformují se tak, aby se objevil úhel 2φ, čímž dostaneme

$$\cos E = \cos\varphi - \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos 2\varphi) + \ldots$$

$$\sin E = \sin\varphi + \frac{\varepsilon}{2}(\sin 2\varphi) + \ldots$$

Začátek Fourierova rozvoje pro w zní tedy

$$w = a\left[-\frac{\varepsilon}{2} + \cos\varphi + \frac{\varepsilon}{2}\cos 2\varphi + \ldots\right] - c + $$
$$+ i b\left[\sin\varphi + \frac{\varepsilon}{2}\sin 2\varphi + \ldots\right].$$

Cos a sin nahradíme exponentiellami a dostaneme

$$w = -\frac{3}{2}c + \frac{a}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + \frac{a\varepsilon}{4}(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}) + \ldots +$$
$$+ \frac{b}{2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) + \frac{b\varepsilon}{4}(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}) + \ldots$$

Urovnáme, berouce Laurentovu řadu za vzor a dostaneme, že

$$w = -\frac{3}{2}c + \frac{a+b}{2}e^{i\varphi} - \frac{a+b}{4}\varepsilon e^{2i\varphi} + \ldots + \qquad (10)$$
$$+ \frac{a-b}{2}e^{-i\varphi} + \frac{a-b}{4}\varepsilon e^{-2i\varphi} + \ldots$$

Z toho přímo čteme

$$c_0 = -\frac{3}{2}c,$$

$$c_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad c_{-1} = \frac{a-b}{2},$$

$$c_2 = \frac{a+b}{4}\varepsilon, \qquad c_{-2} = \frac{a-b}{4}\varepsilon,$$

. . . .

Nalézáme tedy znovu Hipparchův posuv $-3/2 \,.\, c$. Veličina c_1 je poloměrem kruhu Koperníkova, deferentu Ptolemaiova. Veličina c_{-1} je poloměrem malého epicyklického kroužení, jež probíhá touže rychlostí jako na deferentu, ale v opačném směru. Tento epicykl před-keplerovskou astronomií vůbec objeven nebyl. Takový malý epicykl použil sice Koperník u Luny, ale dává mu jinou dobu oběhu, jak je na jeho měsíční teorii vyjádřené vzorcem (7) viděti. Také další dva ještě menší kruhy s oběhem dvakrát rychlejším než na deferentu, pravotočivý s poloměrem c_2, levotočivý s poloměrem c_{-2}, ani od Hellénů ani od Koperníka objeveny nebyly.

Vyjádření málo excentrické elipsy čtverým kroužením kol excentrického bodu je slušným přiblížením. Dává totiž perihelium přesně. V periheliu jest

$$w \equiv a - c = -\frac{3}{2}c + a + \frac{a\varepsilon}{2} = -\frac{2c}{2} + a.$$

V afheliu jest

$$w \equiv -a - c = -\frac{3}{2}c - a - \frac{a\varepsilon}{2} = (-a - c) - c + \ldots$$

Vyhovuje tím lépe, čím menší jest $c = \varepsilon a$.

Nelze-li vyšší potence vůči ε^2 zanedbati, třeba použíti i vyšších epicyklů z dob oběhu 3—, 4— ,,, —krát větší než jest doba oběhu planety. Poloměry těchto kruhů a základní postavení rotujících bodů zjednáme si tímto postupem:

Způsobem v astronomii obvyklým[7]) zjednáme si rozvoj průmětu průvodiče planety

$$X = a(\cos E - \varepsilon)$$

na směr od slunce k periheliu mířící a průmět k X kolmý

$$Y = b \sin E$$

ve Fourierovy řady postupující dle násobků střední anomalie φ, jež souvisí s E relací Keplerovou

$$\varphi = E - \varepsilon \sin E.$$

Na rovnici té vidíme, že E a φ současně mění znaménko. Proto obsahuje rozvoj $\cos E$ jen sudé funkce $\cos \nu\varphi$, rozvoj pro $\sin E$ jen liché funkce $\sin \nu\varphi$. Je tedy

$$\cos E = \frac{b_0}{2} + b_1 \cos \varphi + b_2 \cos 2\varphi + b_3 \cos 3\varphi + \ldots$$

$$\sin E = a_1 \sin \varphi + a_2 \sin 2\varphi + a_3 \sin 3\varphi + \ldots,$$

kde

$$b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos E \,.\, \cos \nu\varphi \,.\, d\varphi \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

$$a_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin E \,.\, \sin \nu\varphi \,.\, d\varphi$$

7) Charlier: „Die Mechanik d. Himmels“ I. § 9. 210. 1902.

Protože φ a E souběžně roste od 0 do π, plyne per partes:

$$b_\nu = \frac{2}{\pi\nu}\int_0^\pi \sin\nu\varphi \,.\, \sin E \,.\, dE; \qquad a_\nu = \frac{2}{\pi\nu}\int_0^\pi \cos\nu\varphi \,.\, \cos E \,.\, dE.$$

Abychom dospěli k vyjádření Besselovými integrály, použijeme relace:

$$2\sin\nu\varphi\sin E = \cos(\nu\varphi - E) - \cos(\nu\varphi + E),$$

$$2\cos\nu\varphi \,.\, \cos E = \cos(\nu\varphi - E) + \cos(\nu\varphi + E).$$

Eliminujeme ještě φ Keplerovou rovnicí a dostaneme

$$\pi\nu b_\nu = \int_0^\pi \cos(\overline{\nu-1}\, E - \varepsilon\nu\sin E)\, dE -$$

$$- \int_0^\pi \cos(\overline{\nu+1}\, E - \varepsilon\nu\sin E)\, dE.$$

Relace pro a_ν zní podobně, jenže oba integrály spojuje znamení $+$.

Tím jsme dospěli k Besselovým integrálům typu:

$$\mathrm{I}_{\varkappa}^{\nu} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\nu E - \varkappa\sin E)\, dE.$$

Fourierovy součinitelé a, b vyjadřují se tedy pomocí takových integrálů ve formě

$$\nu b_\nu = \mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu-1} - \mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu+1}.$$

$$\nu a_\nu = \mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu-1} + \mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu+1}.$$

b_0 vypočítá se přímo z relace

$$b_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos E\,(dE - \varepsilon\cos E\, dE) = -\varepsilon.$$

Je tedy

$$X = -\frac{3}{2}c + \sum_{\nu}^{1\ldots\infty} \frac{a}{\nu}\left[\mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu-1} - \mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu+1}\right]\cos\nu\varphi,$$

$$Y = \sum_{\nu}^{1\ldots\infty} \frac{b}{\nu} \left[\mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu-1} + \mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu+1} \right] \sin \nu\varphi,$$

tak že

$$w = -\frac{3c}{2} + \sum_{\nu}^{1\ldots\infty} \frac{a}{2\nu} \left[\mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu-1} - \mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu+1} \right] (e^{i\nu\varphi} + e^{-i\nu\varphi}) +$$

$$+ \sum_{\nu}^{1\ldots\infty} \frac{b}{2\nu} \left[\mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu-1} + \mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu+1} \right] (e^{i\nu\varphi} - e^{-i\nu\varphi}),$$

což srovnáme dle exponentiell na tvar

$$w = -\frac{3c}{2} + \sum_{\nu}^{1\ldots\infty} e^{i\nu\varphi} \left[\frac{a+b}{2\nu} \mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu-1} - \frac{a-b}{2\nu} \mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu+1} \right] +$$

$$+ \sum_{\nu}^{1\ldots\infty} e^{-i\nu\varphi} \left[\frac{a-b}{2\nu} \mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu-1} - \frac{a+b}{2\nu} \mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu+1} \right]. \tag{11}$$

Porovnáme-li s rozvojem Laurentovým, objevíme po třetí Hipparchův posuv

$$c_0 = -\frac{3}{2} c.$$

Pravotočivé epicykly mají

$$c_\nu = \frac{a+b}{2\nu} \mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu-1} - \frac{a-b}{2\nu} \mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu+1},$$

levotočivé mají (12)

$$c_{-\nu} = \frac{a-b}{2\nu} \mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu-1} - \frac{a+b}{2\nu} \mathrm{I}_{\varepsilon\nu}^{\nu+1},$$

kde za ν dává se absolutní hodnota záporného indexu.

Ježto c_n nemají imaginární složky, jest nulová poloha kroužícího poloměru $|c_n|$ vždy na čáře apsid. Čím rychleji bod na epicyklu krouží, tím menší je jeho poloměr. Viz index ν ve jmenovateli c_n.

Funkce $J_\varkappa^i$ pro reálná i, $\varkappa$ kolísá mezi hodnotami $+1$ a -1. Proto je poloměr ν-tého pravo- i levotočivého epicyklu najisto menší než $a : \nu$.

Funkce $J^i_\varkappa$ pro reálná ani soujemná $\varkappa$ nestane se nekonečnou. Lze ji proto rozvinouti dle potencí veličiny $\varkappa$ v řadu vždy konvergující:

$$\mathrm{I}^i_\varkappa = \frac{\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^i}{i!}\left\{1 - \frac{\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2}{1\,.\,(i+1)} + \frac{\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^4}{2!\,(i+1)\,(i+2)} - \dots\right\}$$

Znamená tedy

$$\mathrm{I}^{\nu-1}_{\varepsilon\nu} = \frac{\left(\frac{\varepsilon\nu}{2}\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\left\{1 - \frac{\left(\frac{\varepsilon\nu}{2}\right)^2}{1\,(\nu)} + \frac{\left(\frac{\varepsilon\nu}{2}\right)^4}{2!\,\nu\,(\nu+1)} - \dots\right\}.$$

$$\mathrm{I}^{\nu+1}_{\varepsilon\nu} = \frac{\left(\frac{\varepsilon\nu}{2}\right)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\left\{1 - \frac{\left(\frac{\varepsilon\nu}{2}\right)^2}{\nu+2} + \frac{\left(\frac{\varepsilon\nu}{2}\right)^4}{2!\,(\nu+2)\,(\nu+3)} - \dots\right\}$$

Pro první t. j. pro hlavní epicykly je $\nu = 1$, tak, že

$$\mathrm{I}^0_\varepsilon = 1 - \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^4}{2!\,2} - \dots$$

$$\mathrm{I}^2_\varepsilon = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}{2!}\left\{1 - \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{3} + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^4}{2!\,3\,.\,4} - \dots\right\}.$$

Zanedbáme-li ε^2 a vyšší potence vůči ε, jest

$$\mathrm{I}^0_\varepsilon \doteq 1, \qquad \mathrm{I}^2_\varepsilon = 0.$$

Poloměr pravotočivého epicyklu bude $\frac{1}{2}(a+b)$, levotočivého $\frac{1}{2}(a-b)$, jak jsme již dříve nalezli úvahou přibližnou (10).

Kontrolujeme-li obdobně druhé epicykly, jest

$$\mathrm{I}^1_{2\varepsilon} = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2} + \frac{\varepsilon^5}{12} - \dots$$

$$\mathrm{I}^3_{2\varepsilon} = \frac{\varepsilon^3}{3!}\left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^4}{40} - \dots\right\}.$$

V prvém přiblížení jest pro malé výstřednosti

$$I^{1}_{2\varepsilon} = \varepsilon; \quad I^{3}_{2\varepsilon} = 0,$$

takže poloměry epicyklů budou

$$\frac{a+b}{4}\varepsilon, \quad \frac{a-b}{4}\varepsilon,$$

což se shoduje se vzorci (10).

Předpokládali jsme jen, že průmět periodického pohybu na rovinu XY dá se rozvinouti pro každou osu v řádu Fourierovu. Pak lze pohyb ten složiti z epicyklických kroužení. Je-li průmět na rovinu XZ téhož charakteru, ovládneme i jej pomocí (jiného) systému epicyklů. Tak lze ovládnouti každý periodický pohyb. Proto neuvedl by starou astronomii žádný nový detail na pohybech nebeských do rozpaků. Vždy by se dal přidáním epicyklů vystihnouti. To si staří astronomové ještě ulehčili tím, že pokládali doby oběhů na jednotlivých epicyklech za na sobě nezávislé empirické konstanty. Brali si víc svobody než třeba.

Složitý arci by tento epicyklický popis pohybů nebeských byl. Ale to nebylo od zeměstřednosti. Tato složitost tížila lidi již dávno před Koperníkem. Kastilský král Alfons X., jenž vládl 1252—1282, povzdechl si nad epicykly antické astronomie: „Kdyby Bůh při stvoření světa mne byl přibral na poradu, lecos bylo by lépe stvořeno!“ — Nevzdychal však nad zeměstředností tehdejší astronomie. Stýskal si nad přílišným zatížením lidského intelektu metodou epicyklů, jejíž každý člen se lopotně dobýval z pozorování. Také Koperník, když dokazoval, že Ptolemaiova teorie arabsko-středověkým pozorováním již nestačí, nevyvracel tím zeměstřednost oné soustavy. Vždyť Koperníkovo odpoutání prostoru od kůry zemské[8]) odstraňuje jen jeden epicykl u každé planety. U měsíce užíval Koperník dvou epicyklů a zůstaly v užívání do objevení Keplerových elips. Ba i Kepler sám ponechal ještě jeden epicykl u měsíce, kde s ideou elipsy nevystačil.

Jako Kolumbus nehledal Ameriku, tak Koperník nehledal sluncestřednou soustavu. Hledal metodu, jak arabsko-středověká pozorování ve spojení s antickou astronomií kondensovati v teorii, jež by dovolovala předvídání zjevů nebeských. V tom směru objevitelem nového a původního nebyl. Nebylo to možno. Fourierovy řady, vektorové sčítání a soujemné funkce nebyly tehdá v dosahu ani prvních matematiků jeho doby.

---

[8]) Viz o tom jasné a jednoduché výklady Einsteinovy ve „čtyřech přednáškách o teorii relativnosti konaných v květnu 1921 na universitě princetonské“. Originálu str. 2.

Ale cesty historie nejsou cesty logiky. Svou Indii nedosáhl; za to objevil prostor. V Koperníkovi vzniklo totiž vlivem filologických studií přesvědčení, že prostor není tuho spojen se zemí, ale se sluncem a stálicemi. Důvody pro tuto novotu byly jen estetické: že „theatrum mundi“ v jeho prostoru je krásnější a jednodušší, než v prostoru Aristotelo-Ptolemaioském, jenž tuho spojen se zeměkoulí.

Ctíme-li Koperníka jako velikého objevitele, činíme to, protože idea sluncestředná se později skvěle osvědčila v rukou Keplera, Galileiho, Newtona. Vedla k mechanice nebeské, jež dovoluje svými metodami, jako princip Hamilton-Jacobi-ho, variace konstant a p. poměrně snadné ovládnutí zjevů nebeských. Pro tuto snadnost apercepce, pro tuto průhlednost úvah, říká se, že mechanika nebeská „vysvětluje“ pohyby nebeské. Ale differentiální rovnice z nichž se počítají dráhy, musíme přece vzíti jen na vědomí tak, jako kdysi Řekové své epicykly. Kdyby intelekt náš rozkládal pohyby periodické tak automaticky v duchu Fourierově jako sluch zvuky, nikomu by nenapadlo vzdychati nad složitostí epicyklů. Pohyby nebeské byly by nám za těchto okolností jimi tak dobře „vysvětleny“ jako kdysi Řekům, kteří označovali rozbor v (nečetné) epicykly jako „zachránění zjevů nebeských“, říkali *διασώζειν τὰ φαινόμενα.*

*

L'épicycle appliqué à l'étude d'un mouvement périodique quelconque.

(Extrait de l'article précédent.)

Avant Newton l'astronomie du système planétaire — il n'y en avait pas d'autre — était une théorie purement phoronomique. On suppose, sans le dire expressément, que les mouvements célestes sont périodiques. Par conséquent, il suffit d'observer le mouvement pendant une période pour prévoir les positions futures des corps célestes. Pour ce but, les Babyloniens se servaient de séries arithmétiques, les Hellènes de la méthode des épicycles. Cette méthode atteint son apogée entre les mains de Copernic, qui est plus classique, au point de vue de la méthodicité, que les Hellènes eux-mêmes, et qui eut, en théoricien, la chance de découvrir un espace plus favorable que celui d'Aristote et Ptolémée, qui était joint à la terre par un lien rigide. D'où vient l'efficacité considérable de la méthode des épicycles? La raison en est que les Anciens se bornaient à des mouvements pour lesquels les coordonnées (1) sont des fonctions périodiques du temps. On peut les développer en des séries de Fourier (2).

Pour entrer dans l'ordre d'idées de l'astronomie des Anciens, il faut faire l'étude simultannée de deux développements de la forme (2). On étudie par-là la projection du mouvement sur un plan de coordonnées. Comme on peut exprimer très facilement la rotation uniforme par une variable complexe, exprimons, de même, par une telle quantité (3) le mouvement dans le plan xy. Cette quantité est exprimée, ce qui est une conséquence des développements de Fourier, par des multiples de sinus et de cosinus, lesquels on remplace, à l'aide des identités d'Euler (4), par des exponentielles. Par-là, la quantité complexe w, donnant le mouvement dans le plan xy, s'exprime par une série infinie d'exponentielles laquelle on peut interpréter, d'après (3), comme des rotations épicycliques. Les épicycles sont dextrorsum ou sinistrorsum; les vitesses angulaires de leurs rotations forment une série arithmétique. La rotation nulle correspond à l'idée de l'excentricité d'après Hipparque.

C'est l'astronomie d'avant Kepler qui fournit des exemples numériques pour ces théories. N'oublions seulement pas que l'astronomie des Anciens considère toujours la rotation de l'épicycle par rapport au rayon vecteur qui l'accompagne d'un mouvement uniforme sur le déférent, tandis que nous, nous rapportons la rotation au plan des coordonnées, comme il est d'usage en géométrie analytique ou dans la théorie des fonctions d'une variable complexe. Donc, pour nous, l'épicycle par lequel Hipparque a rendu l'irrégularité du soleil, ne tourne pas (par rapport au plan du déférent). Les Hellènes affirmaient qu'il tournait (par rapport au rayon vecteur qui l'accompagne sur le déférent). C'est une même ligne d'algèbre (5) qui exprime la théorie du soleil, excentrique aussi bien qu'épicyclique. Les deux théories d'Hipparque ne diffèrent, à notre point de vue, plus que les expressions $a+b$ et $b+a$. On exprime, par l'expression légèrement plus compliquée (6), la plus simple des deux théories de la lune, données encore par Hipparque. Si l'on ajoute encore un terme, on a exprimé, par la formule (7), la théorie de la lune donnée par Copernic, point culminant de la théorie épicyclique.

Le développement du mouvement périodique dans le plan en une série d'exponentielles est semblable à la série de Laurent, bien connue dans la théorie des fonctions. Par conséquent, on peut se servir de la méthode, par laquelle on détermine les coefficients de la série de Laurent dans un anneau, à déterminer directement les constantes c_r (8), dont la valeur absolue est déterminée par le rayon de l'épicycle, l'argument déterminant la position initiale.

A titre d'exemple l'auteur donne la décomposition en épicycles du mouvement elliptique de Kepler. Après avoir simplifié les constantes de Laurent (9), on résout tout d'abord directement et simplement le cas planétaire, c. à. d. celui où l'excentricité numérique est très petite. On trouve sans difficultés les cinq premiers termes du développement de Laurent (10). On réconnait, dans l'épicycle sans rotation, l'excentricité c_0 d'Hipparque. Puis vient le déférent c_1 de l'astronomie classique, dont le rayon est la moyenne arithmétique du grand et du petit axe. Un anticycle tout petit lui correspond, dont le rayon est égal à la demi-différence des deux axes. Le temps de révolution sur cet épicycle est le temps de la révolution de la planète, mais le mouvement est inverse. Cet épicycle n'a pas été découvert par les astronomes d'avant Kepler, pas plus que les deux suivants, c_2 et c_{-2}, ayant une révolution double, resp. dextrorsum et sinistrorsum.

Ces formules deviennent utiles, si l'on exprime par des nombres complexes les résultats numériques de la théorie planétaire des Babyloniens, des Hellènes, des Arabes ou des savants de la rennaissance, et quand nous nous intéressons à savoir à quel degré les Anciens ont approximé nos valeurs.

Enfin, le mouvement planétaire elliptique a été discuté, même pour des ellipses allongées, qui se présentent dans les orbites des comètes. On a fait usage de l'expression, employée en astronomie, des coordonnées des planètes par des séries de Fourier à l'aide des fonctions de Bessel. Le développement de Laurent a été établi cette fois encore, pour w (11), mais dans sa forme complète. Les coefficients en sont les rayons des épicycles cherchés (12). Suit la preuve que le développement précis donne, pour de petites excentricités, les mêmes termes initials qu'on a déduit directement pour des orbites à peu près circulaires.

L'astronomie des Anciens a facilité l'expression des épicycles par ce qu'elle n'a pas tenu compte de la quantisation des vitesses de révolution. Elle les considérait comme des constantes qui sont mutuellement indépendantes, tandis qu'en réalité, il ne peuvent se présenter, à côté de la plus petite ω, que ses multiples. Enfin, Ptolémée a altéré, par sa »prosneusis« le principe des épicycles, ce qui fut refusé par Copernic comme étant une corruption du système.

La complexité du système épicyclique ne tient pas à ce qu'il est basé sur l'hypothèse géocentrique. Les Anciens ne connaissaient pas les séries de Fourier ni l'addition vectorielle ni les fonctions d'une variable complexe. C'est pourquoi ils trouvaient difficiles les considérations épicycliques. Mais il faut avouer que Copernic n'avait, pour le système héliocentrique, d'autres raisons que la raison esthétique: celle que le »theatrum mundi« est plus beau et plus simple dans son espace que dans celui de Ptolémée.
