

Bohuslav Hostinský

O absolutním minimu v theorii geodetických čar

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 5, 529--534

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122690>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1913

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O absolutním minimu v theorii geodetických čar.

Napsal **Bohuslav Hostinský**.

1. Na dané ploše jsou dány dva body. Ze všech čar, jež spojují tyto dva body a leží celé na dané ploše, jest, jak známo, nejkratší jistá čára geodetická, t. j. taková, že její hlavní normála splývá v každém bodě s normálou plochy. Je-li možno vésti několik geodetických čar, spojujících oba body, nastává otázka, která z nich jest nejkratší. Budiž A pevný bod dané plochy, g jistá geodetická čára, bodem A procházející, a A' pohyblivý bod na g , jenž z počátku splývá s bodem A a pohybuje se po g v určitém směru.

Dokud jest A' dosti blízko A , dává oblouk AA' čáry g skutečně nejkratší vzdálenost obou bodů¹⁾. Avšak již v nejjednodušším případě plochy kulové pozorujeme, že oblouk AA' této vlastnosti pozbývá, jestliže se A' dostatečně vzdálí od A (překročí-li bod k A diametrálně protilehlý).

K vyhledání nejkratší vzdálenosti jest třeba vyšetřiti onu polohu bodu A' , ve které oblouk AA' přestává dávatí minimum.

*Jacobi*²⁾ učinil první krok k rozřešení této zajímavé úlohy. Všecky geodetické čáry z bodu A vycházející mohou míti obálku c ; označme g_1 jednu z nich, která svírá s g v bodě A jistý úhel α . g a g_1 protínají se mimo bod A v jistém bodě M (nebo ve více bodech; pak nechť jest M ten, ku kterému A'

¹⁾ *Darboux*: Théorie des surfaces. Vol. II. n^o 518. (1889) nebo *Bolza*: Vorlesungen über Variationsrechnung Kap. VII. (1909).

²⁾ *Jacobi*: Vorlesungen über Dynamik. Sechste Vorlesung (1866). Ges. Werke, Supplementband.

nejdříve dospěje, pohybuje-li se způsobem shora uvedeným). Pro $\lim \alpha = 0$ má M jistou limitní polohu C ; v bodě C dotýká se g obálky c .

Pravíme, že nějaký oblouk dává *relativní minimum*, je-li kratší než jakýkoliv nekonečně blízký oblouk o těchže koncových bodech.

Oblouk dává *absolutní minimum*, je-li vůbec nejkratší ze všech oblouků, kterými lze spojit jeho koncové body. *Jacobi* našel, že AA' jistě přestává dávat relativní minimum, překročí-li A' polohu C .

Avšak i kdyby oblouk AA' čáry g dával relativní minimum pro každou polohu bodu A' mezi A a C , neplatí totéž o minimu absolutním. Dle *Darbouxa*³⁾ přestává obecně absolutní minimum před relativním v jistém bodě B mezi A a C .

Pokud jest A' mezi A a B , dává g minimum absolutní; je-li A' za B , může dávat g jen minimum relativní. Představme si všechny geodetické čáry vycházející z bodu A . Na každé sestrojme bod B ; geom. místo bodu B jest jistá čára p . Každý bod čáry p lze spojit s A dvěma stejně dlouhými geodetickými čarami⁴⁾.

Na konvexní ploše, jejíž obě hlavní křivosti jsou v každém bodě obsaženy v určitých konstantních mezích, jest čára p neuzavřená, všelijak rozvětvená⁵⁾.

2. Předcházející obecné úvahy o absolutním minimu chci ilustrovati na dvou příkladech.

Předpokládejme nejprve, že daná plocha jest rotační ellipsoid a bod A na jeho ekvatoru. Jaký tvar má čára p ?

Obálka c ⁶⁾ má čtyři body úvratu $EF GH$ a tvar podobný jako evoluta ellipsy (viz obr. 1. a 2.); oba obrazce, které

³⁾ *Darboux* l. c. vol. III. n^o 623 (1894); *Bozga* l. c. Kap. IX.

⁴⁾ *Zermelo* (Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. XI. p. 185; 1902) nazývá p »Doppelabstandskurve«; *Poincaré* (Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes; Transactions of the American Math. Soc. vol. VI. § 2.; 1905) nazývá ji »ligne de partage«.

⁵⁾ Viz *Poincaré* l. c.

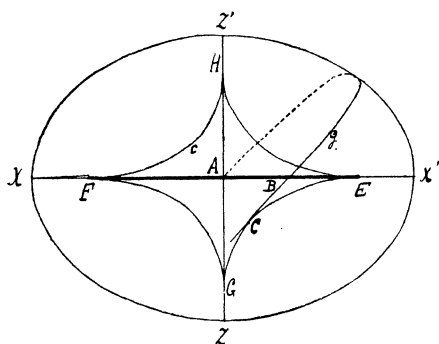
⁶⁾ Na konvexních plochách skládá se úplná obálka geodetických čar z bodu A vycházejících z nekonečného počtu uzavřených tahů (viz *Poincaré* l. c.); písmenou c značím ten z nich, v jehož jednom bodě se g poprvé obálky dotýká.

v podstatě pocházejí od *Jacobiho*, jsou sestrojeny dle *Braunmühla* ⁷⁾, jenž obšírně diskutoval problém relativního minima na rotačních plochách 2. stupně.

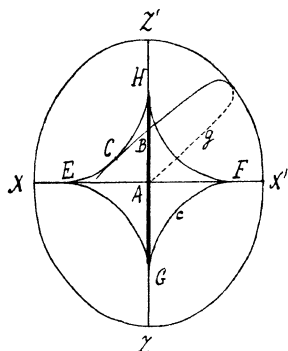
Obr. 1. týká se ellipsoidu zploštělého, obr. 2. ellipsoidu podlouhlého. Na každém obraze jest naznačen meridian, osa rotační ZZ' a průmět XX' ekvatoru do meridianu; bod A' jest za rovinou nákresu, obálka c před ní.

Sledujme průběh geodetické čáry g , vycházející z A .

Na ellipsoidu zploštělém g z počátku stoupá, dosahuje v jistém bodě největší výšky nad ekvátorem, načež opět klesá. Dokud jest A' nad ekvátorem, není možno spojití A' s A jinou geodetickou čarou než g ; tato dává absolutní minimum.



Obr. 1.



Obr. 2.

Bod B , kde g protíná ekvator, lze spojití s A též geodetickým obloukem, jenž jest ku g souměrný vzhledem k rovině ekvatoru; absolutní minimum podél g za bodem B přestává, neboť k bodům A' na dolejší polovině ellipsoidu vedou zajiště kratší cesty. Relativní minimum přestává však teprve v bodě C , kde se dotýkají g a c .

⁷⁾ v. *Braunmühl*: Über Enveloppen geodätischer Linien (Mathem. Annalen Bd. XIV. p. 557—563; 1879). Některé věci, týkající se paraboloidu, nejsou v tomto pojednání zcela správné; viz v. *Mangoldt*: Journal für r. u. angew. Math. Bd. 91. p. 44.

Středový úhel φ příslušný oblouku AE ekvatoru jest dán vzorcem

$$\varphi = \pi \sqrt{\frac{R'}{R}},$$

který jsem odvodil v 2. čísle tohoto ročníku „Časopisu“⁸⁾; R značí poloměr ekvatoru, R' poloměr křivosti meridianu podél ekvatoru.

Mění-li se počáteční směr čáry g , pohybuje se bod B po oblouku EF ekvatoru; tento oblouk tvoří čáru p .

V případě ellipsoidu protáhlého (obr. 2.) obdržíme zcela podobný výsledek. Absolutní minimum přestává v bodě B , kde g protíná meridian bodu A ; relativní minimum v bodě C . Čára p jest zde utvořena obloukem GH meridianu jdoucího bodem A .

Není-li A právě na ekvatoru, mají c i p přibližně podobné tvary jako dříve, nejsou však symetrické k rovině ekvatoru. Jestliže se ellipsoid redukuje na kouli, redukují se c i p na jediný bod protilehlý k A .

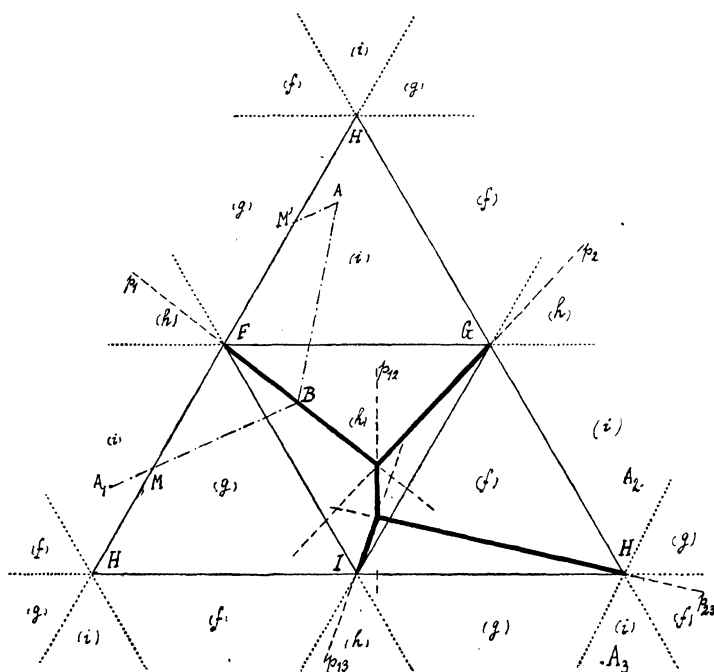
3. Druhý příklad: daná plocha jest pravidelný čtyřstěn o vrcholech $FGHI$. Volme bod A na př. ve stěně FGH a sestrojme síť čtyřstěnu. Postupným přidáváním shodných rovnostranných trojúhelníků lze tuto původní síť rozšířiti do nekonečna, tak že pokrývá celou rovinu, nikde však dvojnásobně; dva sousední trojúhelníky tvoří vždy kosočtverec o vrcholech F, G, H, I . V síti takto rozšířené jeví se každá geodetická čára čtyřstěnu jako přímka. O těchto čarách lze zde mluvit ovšem jen se stanoviska variačního počtu; oskulační rovina přímky jest neurčitá. Geod. čára jest určena jediným bodem a směrem, přijde-li však do vrcholu čtyřstěnu, není možno dále ji prodloužiti.

V obr. 3. jest původní síť slabě vytažena, rozšíření sítě jest vytečkováno. (f), (g) . . . značí stěny protilehlé vrcholům F, G, \dots . Sestrojme body A_1, A_2, A_3 , jež představují bod A ve třech trojúhelnících (i) rozšířené sítě; úsečka AA_1 jest pů-

⁸⁾ Poznámky o geodetických čarách na rotačních plochách (str. 165 až 169). Podotýkám, že pro kruhový prsten jest onen vzorec uveden již v díle *Thomson-Tait: Treatise on the Natural Philosophy. Part I. art. 335.*

lena bodem F , AA_2 bodem G , A_1A_3 bodem I . Osy úseček AA_1 , AA_2 , A_1A_2 , A_1A_3 , A_2A_3 nazveme p_1 , p_2 , p_{12} , p_{13} , p_{23} .

Z částí těchto pěti přímk jest složena čára p v obrazci silně vytažená. Má dva trojnásobné body a končí ve vrcholech čtyřstěnu.



Obr. 3.

Sledujme na př. obě nejkratší čáry, spojující bod A s bodem B . Jedna vychází v obrazci z bodu A , protíná nejprve hranu FG a pak p_1 v bodě B ; druhá vychází v obrazci z bodu A_1 , protíná nejprve hranu HF v bodě M , pak FI a konečně p_1 v B .

Chceme-li celý průběh druhé čáry naznačiti na původní síti, nahradíme úsečku A_1M úsečkou AM' , která je s onou rovnoběžná v opačném směru.

V bodě B přestává absolutní minimum podél první i druhé, poněvadž bod nalézající se na př. na prodloužení úsečky AB za bod B jest blíže bodu A_1 než bodu A .

Tvar čáry p mění se s polohou bodu A ; kdyby na př. bod A splynul s vrcholem H , skládala by se čára p ze tří úseček spojujících střed protilehlé stěny (h) s jejími vrcholy.

Na obrázci verifikujeme následující větu, která dle Poincaréa platí vůbec pro konvexní plochy: Vychází-li z nějakého bodu čáry p několik nejkratších geodetických čar k bodu A , vychází z něho několik větví čáry p , kterými jsou půleny úhly sevřené dvěma konsekutivními nejkratšími čarami.

Studium geodetických čar na mnohostěnech ve smyslu právě uvedeného jednoduchého příkladu má ten význam, že si jím lze učiniti představu o průběhu čáry p na různých konvexních plochách; neboť ku každému (konvexnímu) mnohostěnu lze sestrojiti konvexní plochu, která se od něho velmi málo liší a na níž mají geodetické čáry zcela podobný průběh.

O zvláštních determinantech.

Napsal Dr. Václav Simandl, asistent české techniky v Brně

1. Úvod.

Uvažujme zvláštní quadratickou matici, která má tvar:

$$a = \begin{vmatrix} a_0 & p_0 \cdot b_0 & * & * & . & . & * & * \\ b_0 & a_0 & (p_0 - 1) \cdot b_0 & * & . & . & * & * \\ * & 2 \cdot b_0 & a_0 & (p_0 - 2) \cdot b_0 & . & . & * & * \\ * & * & 3 \cdot b_0 & a_0 & . & . & * & * \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ * & * & * & * & . & . & a_0 & b_0 \\ * & * & * & * & . & . & p_0 \cdot b_0 & a_0 \end{vmatrix}$$

kde a_0 , b_0 jsou opět určité quadratické matice a p_0 určité, celé, kladné číslo. Způsob psaní $p_0 \cdot b_0$, $(p_0 - 1) \cdot b_0$ atd. znamená, že každý prvek matice b_0 jest násoben číslem p_0 , $(p_0 - 1)$, ... atd. Hvězdičky znamenají quadratické matice, které jsou sestaveny vesměs z null.