Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

M. Enrico d'Ovidio

Les points, les plans, et les droites en coordonnées homogènes. II

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 5, 217–238

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122693

Les points, les plans, et les droites en coordonnées homogènes.

(Notes de *M. Enrico d'Ovidio*, prof. au licée Principe Umberto à Naples.)

II.

15. Reprenons la considération du tétraèdre $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$, et désignons par $x\alpha_1$, $x\alpha_2$, $x\alpha_3$, $x\alpha_4$ les distances du point $A\alpha$ aux plans X_1, X_2, X_3, X_4. On voit aisément, d'après le $n^0 12$, que la résultante *ordinaire* des aires planes $(X_2,\, a_2)$, $(X_3,\, a_3)$, $(X_4,\, a_4)$ est égale à $-a_1$, et qu'elle est placée dans un plan conduit par le point A_1 parallèlement au plan X_1; de sorte que ce plan aura par rapport au point $A\alpha$ la distance $x\alpha_1 - x_{11}$, en désignant par x_{11} la distance de A_1 à X_1. Si nous prenons donc les moments des aires composantes et de la résultante par rapport au point A_1, et si nous appliquons le théorème du $n^0 12$, nous aurons

$$a_2\, x\alpha_2 + a_3\, x\alpha_3 + a_4\, x\alpha_4 = -\, a_1(x\alpha_1 - x_{11}),$$

c'est-à-dire

$$\Sigma_r\, a_r\, x\alpha_r = 3V\,(r = 1, 2, 3, 4), \qquad (24)$$

puisque $a_1\, x_{11} = 3V$.

Les quantités $x\alpha_1, \ldots, x\alpha_4$ ont reçu la dénomination de *coordonnées quadriplanaires* du point A^α par rapport au tétraèdre; car, si l'on donne trois d'entre elles, ou encore les rapports de trois d'entre elles à la quatrième, les quatre quantités seront toutes déterminées d'une manière unique, ainsi que le point $A\alpha$ lui même; et réciproquement, le point $A\alpha$ étant donné, les quatre quantités $a\alpha_1, \ldots$, seront uniquement déterminées. L'équation (24) exprime la relation fondamentale qui lie les coordonnées quadriplanaires d'un point.

Nous préférons souvent d'employer au lieu des quantités $x\alpha_1$, $x\alpha_2$, $x\alpha_3$, $x\alpha_4$, les rapports $\frac{a_1 x\alpha_1}{3V}$, $\frac{a_2 x\alpha_2}{3V}$, $\frac{a_3 x\alpha_3}{3V}$, $\frac{a_4 x\alpha_4}{3V}$; nous appelons ces rapports *coordonnées tétraèdrales* du point $A\alpha$, et nous les désignerons par les symboles $z\alpha_1$, $z\alpha_2$, $z\alpha_3$, $z\alpha_4$. La relation fondamentale entre ces nouvelles coordonnées sera

$$\Sigma_r z^{\alpha_r} = 1 \quad (r = 1, 2, 3, 4). \qquad (24)'$$

16. Les produits $a_1 x\alpha_1$, $-a_2 x\alpha_2$, $a_3 x\alpha_3$, $-a_4 x\alpha_4$ étant réspectivement égaux à un tiers des tétraèdres $A\alpha A_2 A_3 A_4$, $A\alpha A_3 A_4 A_1$, $A\alpha A_4 A_1 A_2$, $A\alpha A_1 A_2 A_3$, il résulte du $n^o 13$ que le point $(A\alpha, 3V)$ est le barycentre des quatres points $(A_1, a_1 x^{\alpha_1})$, $(A_2, a_2 x^{\alpha_2})$, $(A_3, a_3 x\alpha_3)$, $(A_4, a_4 x^{\alpha_4})$. Si nous prenons donc les moments de tous ces points par rapport à un plan arbitraire $X\lambda$, nous aurons ($n^o 14$).

$$\Sigma r\, ar\, x\alpha r\, \xi\lambda r = 3V\xi\lambda\alpha \quad (r = 1, 2, 3, 4), \qquad (25)$$

en désignant par $\xi\lambda_1, \ldots, \xi\lambda\alpha$ les distances du plan X_2 aux points $A_1, \ldots, A\alpha$.

Pour que le point A^α tombe dans le plan $X\lambda$, il faut et il suffit que $\xi\lambda\alpha = 0$, c'est-à-dire que

$$\Sigma_r\, a_r\, x\alpha r\, \xi\lambda r = 0. \qquad (26)$$

Par conséquent, si $A\alpha$ est un point quelconque du plan $X\lambda$, c'est-à-dire si $X\lambda$ est le *lieu du point* $A\alpha$, les coordonnées $x\alpha_1, \ldots$ du point $A\alpha$ seront variables, tandisque $\xi\lambda_1$, $\xi\lambda_2$, $\xi\lambda_3$ $\xi\lambda_4$ resteront constantes; et comme elles suffisent à déterminer parfaitement le plan $X\lambda$, ainsi nous appellerons ces quantités les *coordonnées quadriponctuelles* du plan $X\lambda$, et l'équation (26) sera *l'équation du plan* $X\lambda$.

Si, réciproquement, $X\lambda$ est un plan quelconque qui passe par un point $A\alpha$, c'est-à-dire si $A\alpha$ est *l'enveloppe du plan* $X\lambda$, les quantités $\xi\lambda_1, \ldots$ seront variables, tandis que $x\alpha_1, \ldots$ demeureront constantes: et l'équation (26) sera *l'équation du point* $A\alpha$

Souvent nous employons, au lieu de $\xi\lambda_1, \ldots,$ les rapports $\frac{a_1 \xi\lambda_1}{3V}$, $\frac{a_2 \xi\lambda_2}{3V}$, $\frac{a_3 \xi\lambda_3}{3V}$, $\frac{a_4 \xi\lambda_4}{3V}$; nous désignons ces rapports par les symboles $\zeta\lambda_1$, $\zeta\lambda_2$ $\zeta\lambda_3$, $\zeta\lambda_4$; et nous les distinguons par la dénomination de *coordonnées tétraèdrales* du plan $X\lambda$.

D'après les définitions précédentes, l'équation (25) peut s'écrire aussi sous trois formes différentes:

$$\Sigma_r\, z_{\alpha r}\, \xi_{\lambda r} = \xi_{\lambda\alpha}\,,\ \Sigma_r\, x'_{\alpha r}\, \zeta_{\lambda r} = \zeta_{\lambda\alpha}\,,\ \Sigma_r \frac{z_{\alpha r}\, \zeta_{\lambda r}}{a_r} = \frac{\zeta_{\lambda\alpha}}{3V}, \qquad (25)$$

selon que l'on emploie les coordonnées quadriplanaires ou tétraèdrales du point A_α, et les coordonnées quadriponctuelles ou tétraèdrales du plan X_λ.

Une remarque analogue va se présenter souvent dans la suite; car toutes les fois qu'une formule renferme des coordonnées de points et de plans, on peut faire quatre combinaisons entre ces coordonnées. Nous nous bornerons chaque fois à une seule combinaison, étant la transformation d'une d'elles dans les autres bien facile.

17. L'équation (25)' montre que les aires $(X_1\,,\zeta_{\lambda_1})$, (X_2, ζ_{λ_2}), (X_3, ζ_{λ_3}), (X_4, ζ_{λ_4}) ont pour résultante l'aire $(X_\lambda\,, 1)$, d'après le théorème des moments du n^o12. Par conséquent, si l'on applique à ces aires les formules du n^o12, on trouve, en indiquant par X_μ un autre plan arbitraire,

$$\cos(\lambda\mu) = \Sigma_r\, \zeta_{\lambda r} \cos(\mu r), \qquad (27)$$

$$1 = \Sigma_r\, \zeta_{\lambda r} \cos(\lambda r), \qquad (28)$$

$$\cos(\lambda 1) = \Sigma_r\, \zeta_{\lambda r} \cos(1r)\,, \ldots, \cos(\lambda 4) = \Sigma_r\, \zeta_{\lambda r} \cos(4r), \qquad (29)$$

$$1 = \Sigma_{rs}\, \zeta_{\lambda r}\, \zeta_{\lambda s} \cos(rs)\,, \left(\begin{matrix} r \\ s \end{matrix} = 1,\ 2,\ 3,\ 4.\right). \qquad (30)$$

La dernière équation exprime la relation fondamentale entre les coordonnées d'un plan.

Des équations (27) et (29) on tire, en changeant dans (27) λ en μ et *viceversa*,

$$\cos(\lambda\mu) = \Sigma_{rs}\, \zeta_{\lambda r}\, \zeta_{\mu s} \cos(rs); \qquad (31)$$

formule, qui donne le cosinus de l'angle de deux plans, et qui renferme comme corollaire la formule précédente.

L'équation (31), à l'aide des formules (17) et (18) du $n.^o$ 8, prend deux autres formes:

$$144\, V^2 \cos(\lambda\mu) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \xi_{\lambda_1} & \xi_{\lambda_2} & \xi_{\lambda_3} & \xi_{\lambda_4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi_{\mu_1} & 1 & 0 & \delta^2_{12} & \delta^2_{14} & \delta^2_{14} \\ \xi_{\mu_2} & 1 & \delta^2_{21} & 0 & \delta^2_{23} & \delta^2_{24} \\ \xi_{\mu_3} & 1 & \delta^2_{31} & \delta^2_{32} & 0 & \delta^2_{34} \\ \xi_{\mu_4} & 1 & \delta^2_{41} & \delta^2_{42} & \delta^2_{43} & 0 \end{vmatrix}, \qquad (31)'$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\cos(\lambda\mu) & 0 & \xi\lambda_1 & \xi\lambda_2 & . \\ 0 & 0 & 1 & 1 & . \\ \xi\mu_1 & 1 & 0 & \delta^2_{12} & . \\ \xi\mu_2 & 1 & \delta^2_{21} & 0 & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} = 0, \qquad (31)''$$

d'ou l'on déduit deux autres formes de la relation (30), en faisant $\mu = \lambda$.

Si l'on emploie deux tétraèdres, les formules (29), etc: se changent dans les suivantes:

$$\cos(\lambda 1') = \Sigma_r\, \zeta\lambda r \cos(r1'), \ldots, \cos(\lambda 4') = \Sigma_r\, \zeta\lambda r \cos(r4'), \qquad (29)$$

$$1 = \Sigma_{ip'}\, \zeta\lambda i\, \zeta\lambda p' \cos(ip') \qquad (30)'$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, \ldots, 4 \\ p' = 1', \ldots, 4' \end{pmatrix}$$

$$\cos(\lambda\mu) = \Sigma_{ip'}\, \zeta\lambda_i\, \zeta\mu p' \cos(ip'), \qquad (31)'''$$

$$144 V V^1 \cos(\lambda\mu) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \xi s_1 & \xi\lambda_2 & . \\ 0 & 0 & 1 & 1 & . \\ \xi\mu_{1'} & 1 & \delta^2_{1'1} & \delta^2_{1'2} & . \\ \xi\mu_{2'} & 1 & \delta^2_{2'1} & \delta^2_{2'2} & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\cos(\lambda\mu) & 0 & \xi\lambda_1 & \xi\lambda_2 & . \\ 0 & 0 & 1 & 1 & . \\ \xi\mu_{1'} & 0 & \delta^2_{1'1} & \delta^2_{1'2} & . \\ \xi\mu_{2'} & 1 & \delta^2_{2'1} & \delta^2_{2'2} & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} = 0, \qquad (31)'''$$

etc. etc.

18. Une équation linéaire entre $x\alpha_1, \ldots, x\alpha_4$ ou $z\alpha_1, \ldots, z\alpha_4$:

$$\Sigma_r\ p\lambda r\ x\alpha r = 0 \text{ ou } \Sigma_r p\lambda r\ x\alpha r = 0,$$

représente un plan, c'est-à-dire le plan qui a pour coordonnées

$$\xi\lambda i = \frac{p\lambda i}{\Sigma^{\frac{1}{2}}{}_{rs}\ p\lambda r\ p\lambda s \cos(rs)} \text{ ou } \xi\lambda i = \frac{3 V p\lambda i}{\Sigma^{\frac{1}{2}}{}_{ar}\ a_s\, p\lambda r\, p\lambda s \cos(rs)},$$

i désignant successivement 1, 2, 3, 4, et $\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix} = 1, 2, 3, 4$.

Une équation linéaire entre $\xi\lambda_1, \ldots, \xi\lambda_4$ ou $\zeta\lambda_1, \ldots, \zeta\lambda_4$

$$\Sigma_r\, \pi\alpha r\, \xi\lambda r = 0 \text{ ou } \Sigma_r\, \pi\alpha r\, \zeta\lambda r = 0,$$

représente le point qui a pour coordonnées

$$z\alpha i = \frac{\pi\alpha i}{\pi\alpha_1 + \ldots + \pi\alpha_4} \text{ ou } x\alpha i = \frac{3 V \pi\alpha i}{a_1\pi\alpha_1 + \ldots + a_4\pi\alpha_4}.$$

Au moyen de ces relations on pourra toujours transformer les formules qui renferment les quantités x, z, ξ, ζ, pour faire qu'elles porter à renferment les quantités p et π.

19. Désignons par D une droite indéfinie, donnée de position et de direction positive; et portons sur cette droite un segment égal à l'unité. Sur les arêtes du tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$ on peut toujours déterminer *uniquement* un système de six segments, dont le segment donné (D, 1) soit le résultant *ordinaire*,*) c'est-à-dire tel qu'on le définit en Mécanique, lorsqu'on regarde les segments comme des forces.

Réciproquement, si l'on donne cinq segments sur cinq arêtes du tétraèdre, on peut déterminer sur la sixième arête un autre segment, qui, composé avec les précédents, donne un segment résultant ordinaire.**) Ce segment est l'unique: le résultant sera de même uniquement déterminé de grandeur et de direction, et sa droite sera déterminée de position. Si l'on change la grandeur du segment résultant en le réduisant à l'unité, les composants changent leur grandeur dans le même rapport; et si l'on renverse la direction du résultant, il en arrive de même des composants: dans l'une et dans l'autre hypothèse les trente rapports mutuels des composants demeurent invariables. De là on conclut que, si l'on donne les rapports de quatre composants à l'un des restants, et si l'on veut que le système admette un résultant ordinaire et égal à l'unité, les six

---

*) En effet, si D coupe X_1 au point p, on peut décomposer le segment donné en deux: le premier suivant pA_1, le deuxième suivant l'intersection des plans DA_1, X_1. Le premier se décompose en trois, suivant les arêtes $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4$; et le deuxième (si l'on appelle q le point ou sa droite coupe $A_2 A_3$) se décompose en deux: l'un suivant l'arête $A_2 A_3$, l'autre suivant qA_4. Celui-ci enfin se décompose en deux suivant les arêtes $A_2 A_4$, $A_3 A_4$.

**) En effet, si les segments donnés existent sur les arêtes $A_1 A_2, A_1 A_3$, $A_1 A_4, A_2 A_3, A_3 A_4$, composons les trois premiers, et supposons que la droite du résultant ordinaire coupe le plan $A_2 A_3 A_4$ au point p; composons encore les deux derniers, et supposons que leur résultant ordinaire coupe $A_3 A_4$ au point q. Sur la droite $A_3 A_4$ déterminons le segment qui, composé avec ce résultant, donne un résultant ordinaire passant par p; et composons ce dernier résultant avec le premier. Nous aurons ainsi le sixième segment et le résultant en question.

segments composants seront uniquement déterminés de longueur mais non de direction; et le résultant appartiendra à une droite qui sera déterminée uniquement de position, mais ne sera pas déterminée de direction positive.

Il résulte de tout ce qui a été exposé ci-dessus que l'on peut choisir comme *coordonnées* d'une droite par rapport à un tétraèdre, les rapports de quatre parmi les six segments composants d'un segment égal à l'unité et pris sur la droite, à l'un des deux, qui restent; *) cependant nous préférons d'employer comme coordonnées les six segments eux-mêmes. On voit que ces nouvelles coordonnées ne sont pas tout à fait indépendentes entr'elles, et nous nous occuperons bientôt à exprimer leurs relations mutuelles au moyen de deux équations.

20. Cela posé, j'appelle indifféremment $A_i A_k$ ou $A_k A_i$ la droite indéfinie qui passe par les points A_i, A_k considérée dans sa position et dans sa direction positive; tandis que δ_{ik} $(= - \delta_{ki})$ désigne la distance, positive ou negative, de A_i à A_k. De plus j'appelle

$$c_{12} \text{ et } c_{34}\,,\, c_{13} \text{ et } c_{42}\,,\, c_{14} \text{ et } c_{23}$$

les composants du segment $(D, 1)$ suivant les arêtes

$$A_1 A_2 \text{ et } A_3 A_4\,,\, A_1 A_3 \text{ et } A_4 A_2\,,\, A_1 A_4 \text{ et } A_2 A_3\,;$$

et $$M_{12} \text{ et } M_{34}\,,\, M_{13} \text{ et } M_{42}\,,\, M_{14} \text{ et } M_{23}$$

les moments de la droite D par rapport aux mêmes arêtes.

Je suppose que $c_{12}, \ldots$ et $M_{12}, \ldots$ changent de signe lorsque on renverse l'ordre des indices dont ils sont affectés. Par conséquent, si l'on désigne par *ikmn* une permutation du groupe 1, 2, 3, 4 donée d'un nombre pair d'inversions, $\pm c_{ik}$ et $\pm c_{mn}$ seront les composants suivant les arêtes opposées $A_i A_k$, $A_m A_n$; et M_{ik}, M_{mn} seront les moments relatifs aux mêmes arêtes.

D'après un théorème connu (n^0 14),**) le moment du segment $(D, 1)$ par rapport à $A_i A_k$ est égal à la somme des moments

*) Il faudrait y ajouter le signe d'un segment, pour determiner aussi la direction positive de la droite.

**) Dans l'endroit cité, ce théorème a été énoncé seulement pour des droites sitnées dans un plan; mais il se généralise aisément pour des droites admettant une résultante ordinaire, bien qu'elles ne tombent dans un même plan.

des segments composants; et comme les moments des composants placés sur les arêtes qui aboutissent aux points $A_i A_k$, sont nuls; ainsi l'on a

$$M_{ik} = c_{mn} \; mom\,(A_i A_k \; , A_m \; A_n). \qquad (32)$$

Cette relation prouve que l'on pourrait bien prendre comme coordonnées de la droite D les moments $M_{12}, \ldots$ ou bien des composants $c_{12}, \ldots.$

Relations mètriques en coordonnées de droites.

21. Soit D' une autre droite; $c'_{1'2'}, \ldots$ les composants du segment $(D', 1)$ suivant les arêtes $A_{1'} A_{2'}, \ldots$ d'un second tétraèdre de référence $A_{1'} A_{2'} A_{3'} A_{4'}$; et $M_{1'2'}, \ldots$ les moments de D par rapport aux mêmes arêtes. Le moment de $(D', 1)$ par rapport à une droite arbitraire étant égal à la somme des moments des composants $c'_{1'2'}, \ldots$, on aura, par rapport à $A_i A_k$,

$$M'_{ik} = \Sigma_{p'q'} \, c'_{p'q'} \; mom\,(A_i \, A_k \, , A_{p'} \, A_{q'})$$
$$(p'q' = 1'2' \, , 1'3' \, , 1'4' \, , 2'3' \, , 3'4' \, , 4'2').$$

D'après la même proposition on a

$$mom\,(D\,D') = \Sigma_{ik} \, c_{ik} \, M'_{ik}$$
$$(ik = 12, \; 13, \; 14, \; 23, \; 34, \; 42);$$

et si l'on remplace ici M'_{ik} par sa valeur, on trouve

$$mom\,(D\,D') = \Sigma_{ik,\,p'q'} \, c_{ik} \, c'_{p'q'} \; mom\,(A_i \, A_k \, ; \, A_{p'} \, A_{q'}). \qquad (33)$$
$$(ik = 12, \; 13, \; 14, \; 23, \; 34, \; 42 \; \text{et} \; p'q' = 1'2', \ldots..);$$

équation qui donne le moment de deux droites D, D' déterminées par leurs coordonnées relatives à deux tétraèdres de référence.

Les deux droites sont placées dans un même plan (parallèles ou convergentes), lorsque $mom\,(D\,D') = 0$, c'est-à-dire lorsque les coordonnées des droites remplissent la condition:

$$\Sigma_{ik,\,p'q'} \, c_{ik} \, c'_{p'q'} \; mom\,(A_i A_k \; , A_{p'} \, A_{q'}) = 0.$$

Cette condition est satisfaite aussi, lorsque les deux droites coïncident; par conséquent on aura toujours cette première relation fondamentale et homogène entre les coordonnées d'une droite D par rapport à deux tétraèdres:

$$\Sigma_{ik,\,p'q'} \, c_{ik} \, c_{p'q'} \; mom\,(A_i \, A_k \; , A_{p'} \, A_{q'}) = 0. \qquad (34)$$

En projetant le segment $(D, 1)$ et ses composants sur la droite D', on a

$$\cos(D\,,D') = \Sigma_{ik}\, c_{ik} \cos(D',\, A_i A_k)\,; \qquad (35)$$

et en projetant $(D',\ 1)$ et ses composants sur $A_i\, A_k$,

$$\cos(D',\ A_i A_k) = \Sigma_{p'\,q'}\, c'_{p'q'} \cos(A_i\, A_k\ ,\ A_{p'}\, A_{q'}).$$

De ces deux équations on tire

$$\cos(D\,D') = \Sigma_{ik,p'q'}\, c_{ik}\, c'_{p'q'} \cos(A_i\, A_k\ ,\ A_{p'}\, A_{q'})\,; \qquad (36)$$

formule qui donne le cosinus de l'angle de deux droites déterminées par leurs coordonnées relatives à deux tétraèdres.

Faisons coïncider D' avec D; nous aurons la deuxième relation fondamentale entre les coordonnées d'une droite par rapport aux deux tétraèdres,

$$1 = \Sigma_{ik\,p'q'}\, c_{ik}\, c_{p'q'} \cos(A_i\, A_k\ ,\ A_{p'}\, A_{q'}). \qquad (37)$$

Elle n'est pas homogène.

22. Supposons à présent, pour rentrer dans le cas le plus ordinaire, que le second tétraèdre se confonde avec le premier: alors les équations (33), (36) donnent le moment de deux droites D, D' et le cosinus de leur angle en fonction des coordonnées de ces droites par rapport à un même tétraèdre: on a

$$\mathrm{mom}\,(D\,D') = \Sigma_{ikmn}\,(c_{ik}\, c'_{mn} + c'_{ik}\, c_{mn})\ \mathrm{mom}\,(A_i\, A_k\ ,\ A_m\, A_n) \qquad (33)'$$

$$(ikmn = 1234,\ 1342,\ 1423),$$

$$\cos(D\,D') = \Sigma_{ik,pq}\, c_{ik}\, c'_{pq} \cos(A_i\, A_k\ ,\ A_p\, A_q) \qquad (36)$$

$$\left(\begin{matrix} ik \\ pq \end{matrix} = 12,\ 34,\ 13,\ 42,\ 14,\ 23\right).$$

Dans la même hypothèse les équations (34), (37) donnent les deux relations fondamentales entre les coordonnées d'une droite par rapport à un tétraèdre.

$$0 = c_{12}\, c_{34}\ \mathrm{mom}\,(A_1\ A_2\ ,\ A_3\ A_4) + c_{13}\ c_{24}\ \mathrm{mom}\,(A_1\ A_3\ ,\ A_2\ A_4) +$$
$$c_{14}\ c_{23}\ \mathrm{mom}\,(A_1\ A_4\ ,\ A_2\ A_3), \quad \ldots\ldots \qquad (34)'$$

$$1 = \Sigma_{ik,\,pq}\, c_{ik}\, c_{pq} \cos(A_i\, A_k\ ,\ A_p\, A_q). \qquad (37)'$$

On voit que ces deux équations sont du second dégré, et que la première est homogène.

23. Imaginons un tétraèdre, qui ait pour arêtes opposées une arête du tétraèdre $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ et un segment égal à l'unité sur la droite D: nous aurons ainsi six tétraèdres; et le volume de celui qui corresponde à l'arête $A_i\, A_k$ sera exprimé*)

---

*) Le volume d'un tétraèdre est égal à un sixième du produit de deux arètes oppposées multiplié par le moment des droites dont ces arêtes font partie.

par $\frac{1}{6}\delta_{ik}\, M_{ik}$, c'est-à-dire [d'après (32)] par $\frac{1}{6}c_{mn}\,\delta_{ik}\, mom\,(A_i\, A_k, A_m\, A_n)$. Ce volume, divisé par le volume du tétraèdre $A_1 \ldots A_4$, qui a pour expression $V = \frac{1}{6}\delta_{ik}\,\delta_{mn}\, mom\,(A_i\, A_k\,,\, A_m\, A_n)$, donne $\frac{c_{mn}}{\delta_{mn}}$; et je désigne ce quotient par y_{ik}, c'est-à-dire je pose

$$y_{ik} = \frac{c_{mn}}{\delta_{mn}}, \text{ d'où } c_{mn} = y_{ik}\,\delta_{mn}. \tag{38}$$

On voit par là que les six quantités

$$y_{12}\,,\, y_{34}\,,\, y_{13}\,,\, y_{42}\,,\, y_{14}\,,\, y_{23}$$

pourront être employées comme coordonnées de la droite D par rapport au tétraèdre $A_1 \ldots A_4$, au lieu de $c_{12}, \ldots$ et de $M_{12}, \ldots$, C'est ce système de coordonnées que nous allons employer le plus souvent dans la suite.*)

Commençons par transformer les expressions que l'on vient de trouver pour $mom\,(D\,D')$ et $cos\,(D\,D')$, à l'aide de la relation (38): nous aurons

$$mom\,(D\,D') = 6\Sigma_{ikmn,\,p'q'r's'}\; y_{ik}\, y'_{p'q'}\,.\, A_m\, A_n\, A_{r'}\, A_{s'} \tag{39}$$

$$\begin{pmatrix} ikmn = 1234,\ 1342,\ 1423,\ 3412,\ 4213,\ 2314 \\ p'q'r's' = 1'2'3'4' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix},$$

$$cos\,(D\,D') = \Sigma_{ikmn,\,p'q'r's'}\; y_{ik}\, y'_{p'q'}\,\delta_{mn}\,\delta_{r's'}\, cos\,(A_m\, A_n\,,\, A_{r'}\, A_{s'}), \tag{40}$$

d'où

$$cos\,(D\,D') = \frac{4}{9VV'}\Sigma_{ik,p'q'} y_{ik} y'_{p'q'} . a_i\, a_k\, a_{p'}\, a_{q'} \sin(ik) \sin(p'q') \cos(ik,p'q') \tag{40'}$$

$(ik = 12,\ 34,\ 13,\ 42,\ 14,\ 23$ et $p'\,q' = 1'2', 3'4', \ldots\ldots)$;

et dans le cas d'un seul tétraèdre,

$$mom\,(D\,D') = 6V(y_{12}\, y'_{34} + y_{34}\, y'_{12} + y_{13}\, y'_{42} + y_{42}\, y'_{13} + y_{14}\, y'_{23} + y_{23}\, y'_{14}), \tag{39'}$$

$$cos\,(D\,D') = \Sigma_{ikmn,pqrs}\; y_{ik}\, y'_{pq}\,\delta_{mn}\,\delta_{rs}\, cos\,(A_m\, A_n\,,\, A_r\, A_s) \tag{40''}$$

$$\begin{pmatrix} ikmn \\ pqrs \end{pmatrix} = 1234,\ 1342,\ 1423,\ 3412,\ 4213,\ 2314),$$

*) Ce système a été introduit par **M. Cayley** (*Quarterly Journal* t. III p. 226, 1860 et *Transactions of the Cambridge philosophical Society* vol. XI p. 11), et il a été repris par **M. Zeuthen** (*Mathématische Annalen* vol. I p. 432, 1870). Dans l'exposition des principes fondamentaux de ce système j'ai suivi de près **M. Zeuthen**; et je me flatte d'avoir porté quelques perfectionnements dans cette exposition.

$$\cos(D\,D') = \frac{4}{qV^2}\,\Sigma_{ik,pq}\; y_{ik}\,y'_{pq}\; a_i a_k a_p a_q \sin(ik)\sin(pq)\cos(ik,pq) \qquad (40)'''$$

$$\left(\begin{matrix} ik \\ pq \end{matrix} = 12,\ 34,\ 13,\ 42,\ 14,\ 23\right).$$

Dans ce même cas les deux relations fondamentales (34)′ (37)′ entre les coordonnées d'une droite se réduisent à

$$y_{12}\,y_{34} + y_{13}\,y_{42} + y_{14}\,y_{23} = 0, \qquad (41)$$

$$1 = \Sigma_{ikmn,\,pqrs}\; y_{ik}\,y_{pq}\,.\,\delta_{mn}\,\delta_{rs}\cos(A_m A_n\,,\,A_r A_s) \qquad (42)$$

dont la deuxième peut s'écrire aussi

$$\frac{qV^2}{4} = \Sigma_{ik,pq}\; y_{ik}\,y_{pq}\,.\,a_i\,a_k\,a_p\,a_q \sin(ik)\sin(pq)\cos(ik,pq). \qquad (42)'$$

24. Si dans la formule (35) on remplace D' par une droite $D^{(i)}$ perpendiculaire au plan X_i, on a, en désignant toujours par *ikmn* unn permutation de $1, 2, 3, 4$ avec un nombre pair d'inversions,

$$\cos(D\,D^{(i)}) = c_{ik}\cos(D^{(i)}, A_i A_k) + c_{im}\cos(D^{(i)}, A_i A_m) + c_{in}\cos(D^{(i)}, A_i A_n),$$

et d'après (38),

$$\cos(D\,D^{(i)}) = y_{mn}\,\delta_{ik}\cos(D^{(i)}, A_i A_k) + y_{nk}\,\delta_{im}\cos(D^{(i)}, A_i A_m) + y_{km}\,\delta_{in}\cos(D^{(i)}, A_i A_n):$$

les coéfficients de $y_{mn}, \ldots$ étant égaux à la distance de A_i à X_i, c'est-à-dire à $\dfrac{3V}{a_i}$, on trouve

$$\cos(D\,D^{(i)}) = \frac{3V}{a_i}(y_{km} + y_{mn} + y_{nk}),$$

et on en déduit

$$\cos(D\,D^{(1)}) = \frac{3V}{a_1}Y_1,\ \cos(D\,D^{(2)}) = \frac{3V}{a_2}Y_2,\ \cos(D\,D^{(3)}) = \frac{3V}{a_3}Y_3,\ \cos(D\,D^{(4)}) = \frac{3V}{a_4}Y_4, \qquad (43)$$

en posant

$$Y_1 = y_{23} + y_{34} + y_{42}\,,\ -Y_2 = y_{34} + y_{41} + y_{13}\,,\ Y_3 = y_{41} + y_{12} + y_{24}\,,\ -Y_4 = y_{12} + y_{23} + y_{31}.$$

Ces formules nous permettent de donner de nouvelles expressions pour $\cos(D\,D')$ et pour la deuxième relation entre les coordonnées d'une droite. En effet, si dans l'équation (22) du *n*° 9 on remplace X_α, X_β, $X_1, \ldots$ par les droites D, D' $D^{(1)}, \ldots$ (ce qui est permis), l'équation (22) devient

$$-2\cos(D\,D') = \Sigma_{ip'}\, Y_i\, Y'_{p'}\, \delta^2_{ip'} \tag{44}$$
$$(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \quad \text{et} \quad p' = 1',\ 2',\ 3',\ 4'),$$

d'où l'on tire

$$-2\cos(D\,D') = \Sigma_{ip}\, Y_i\, Y'_p\, \delta^2_{ip} \tag{44'}$$
$$\left(\begin{matrix} i \\ p \end{matrix} = 1,\ 2,\ 3,\ 4\right)$$

et

$$2 = \Sigma_{ip'}\, Y_i\, Y_{p'}\, \delta^2_{ip'} \tag{45}$$
$$-2 = \Sigma_{ip}\, Y_i\, Y_p\, \delta^2_{ip}\,. \tag{45'}$$

On pourrait transformer de la même manière les équations (19), (20), (21) du n^0 9.

25. Avant de continuer la recherche des relations mètriques en coordonnées de droites, il faut d'abord établir deux formules importantes, qui d'ailleurs auraient bien trouvé leur place au n^0 12.

Supposons que $X_1, \ldots, X_n$ et $X_{1'}, \ldots, X_{n'}$ désignent deux systèmes de directions données, et qu'une droite variable (X_α, a_α) ait pour composants suivant le premier système $a_{\alpha 1}, \ldots, a_{\alpha n}$ et suivant le deuxième $a_{\alpha 1'}, \ldots, a_{\alpha n'}$. Faisons des hypothès analogues pour les droites X_β, X_γ, X_ε, et projectons le système $a_{\alpha 1}, \ldots, a_{\alpha n}$ sur X_γ et le système $a_{\gamma 1'}, \ldots, a_{\gamma n'}$ sur X_α: nous aurons

$$a_\alpha \cos(X_\alpha\, X_\gamma) = \Sigma_r\, a_{\alpha r} \cos(X_r\, X_\gamma) \quad (r = 1, \ldots, n),$$
$$a_\gamma \cos(X_r\, X_\gamma) = \Sigma_{p'}\, a_{\gamma s'} \cos(X_r\, Y_{s'}) \quad (p' = 1', \ldots, n'),$$

et par conséquent

$$a_\alpha\, a_\gamma \cos(X_\alpha\, X_\gamma) = \Sigma_{ip'}\, a_{\alpha i}\, a_{\gamma p'} \cos(X_i\, X_{p'}) \tag{46}$$
$$(i = 1, \ldots, n \quad \text{et} \quad p' = 1', \ldots, n).$$

Cela posé, si dans la relation connue [éq. (1) n^0 3],

$$\sin(X_\alpha\, X_\beta) \sin(X_\gamma\, X_\varepsilon) \cos(X_\alpha\, X_\beta, X_\gamma\, X_\varepsilon),$$
$$= \begin{vmatrix} \cos(X_\alpha\, X_\gamma) & \cos(X_\alpha\, X_\varepsilon) \\ \cos(X_\beta\, X_\gamma) & \cos(X_\beta\, X_\varepsilon) \end{vmatrix},$$

on remplace la valeur de $\cos(X_\alpha\, X_\gamma)$ donnée par l'équation précédente et les valeurs analogues de $\cos(X_\alpha\, X_\varepsilon), \ldots,$ il résulte

$$a_\alpha\, a_\beta\, a_\gamma\, a_\varepsilon \sin(X_\alpha\, X_\beta) \sin(X_\gamma\, X_\varepsilon) \cos(X_\alpha\, X_\beta, X_\gamma\, X_\varepsilon)$$
$$= \begin{vmatrix} \Sigma_{ip'}\, a_{\alpha i}\, a_{\gamma p'} \cos(X_i\, X_{p'}) & \Sigma_{ip'}\, a_{\alpha i}\, a_{\varepsilon p'} \cos X_i\, X_{p'}) \\ \Sigma_{ip'}\, a_{\beta i}\, a_{\gamma p'} \cos(X_i\, X_{p'}) & \Sigma_{ip}\, a_{\beta i}\, a_{\varepsilon p'} \cos X_i\, X_{p'}) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha n} \\ a_{\beta_1} \ldots a_{\beta n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Sigma_{p'} a_{\gamma p'} \cos(X_1\, X_{p'}) \ldots \Sigma_{p'}\, a_{\gamma p'} \cos(X_n\, X_{p'}) \\ \Sigma_{p'}\, a_{\varepsilon p'} \cos(X_1\, X_{p'}) \ldots \Sigma_{p'}\, a_{\varepsilon p'} \cos(X_n\, X_{p'}) \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma_{ik}(a\alpha i\, a\beta k - a\alpha k\, a\beta i) \begin{vmatrix} \Sigma_{p'} a\gamma p' \cos(X_i X_{p'}) & \Sigma_{p'} a\gamma p' \cos(X_k X_{p'}) \\ \Sigma_{p'} a\varepsilon p' \cos(X_i X_{p'}) & \Sigma_{p'} a\varepsilon p' \cos(X_k X_{p'}) \end{vmatrix}$$

$$\left(\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} = 1, \ldots, n \text{ et } i < k\right)$$

$$= \Sigma_{ik}(a\alpha i\, a\beta k - a\alpha k\, a\beta i) . \begin{vmatrix} a\gamma_1' & \ldots & a\gamma n' \\ a\varepsilon_1' & \ldots & a\varepsilon n' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \cos(X_i X_{1'}) & \ldots & \cos(X_i X_{n'}) \\ \cos(X_k X_{1'}) & \ldots & \cos(X_k X_{n'}) \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma_{ik,p'q'} (a\alpha i\, a\beta k - a\alpha k\, a\beta i)(a\gamma p'\, a\varepsilon q' - a\gamma q'\, a\varepsilon p') \times \begin{vmatrix} \cos(X_i X_{p'}) & \cos(X_i X_{q'}) \\ \cos(X_k X_{p'}) & \cos(X_k X_{q'}) \end{vmatrix},$$

$$\left(\begin{smallmatrix} p' \\ q' \end{smallmatrix} = 1', \ldots, n' \text{ et } p' < q'\right);$$

on peut ôter les restrictions $i < k$ et $p' < q'$ en écrivant

$$a\alpha\, a\beta\, a\gamma\, a\varepsilon \sin(X\alpha X\beta) \sin(X\gamma X\varepsilon) \cos(X\alpha X\beta, X\gamma X\varepsilon) \tag{47}$$
$$= \Sigma_{ik,p'q'} a\alpha i\, a\beta k\, a\gamma p'\, a\varepsilon q' \sin(X_i X_k) \sin(X_{p'} X_{q'}) \cos(X_i X_k, X_{p'} X_{q'})$$

Voilà la première des deux formules en question.

On obtient la deuxième en appliquant le même procédé à la relation connue [éq. (4) n^0 3] *)

$$\sin^2(X\alpha X\beta X\gamma) = \begin{vmatrix} \cos(X\alpha X\alpha) & \cos(X\alpha Y\beta) & \cos(X\alpha X\gamma) \\ \cos(X\beta X\alpha) & \cos(X\beta X\beta) & \cos(X\beta X\gamma) \\ \cos(X\gamma X\alpha) & \cos(X\gamma X\beta) & \cos(X\gamma X\gamma) \end{vmatrix},$$

et il vient

$$a\alpha\, a\beta\, a\gamma \sin(X\alpha, X\beta, X\gamma) = (\Sigma_{ikm} a\alpha i\, a\beta k\, a\gamma m \sin(X_i X_k X_m) \tag{48}$$

$$\left(\begin{smallmatrix} i \\ k \\ m \end{smallmatrix} = 1, 2, \ldots, n\right).$$

Les deux membres de cette équation représentent six fois le volume d'un tétraèdre, dont trois arêtes convergentes soient égales à $a\alpha\, a\beta\, a\gamma$ et parallèles à $X\alpha$, $X\beta$, $X\gamma$.

Il est bon de remarquer que les formules (47) et (48) subsistent aussi lorsque $X\alpha, \ldots, X_1, \ldots, X_{1'}, \ldots$ désignent des plans, et $a\alpha, \ldots, a\alpha_1, \ldots, a\alpha_{1'}, \ldots$ des aires situées dans ces plans.

26. Nous allons maintenant appliquer la formule (47) à quatre droites arbitraires $(D, 1)$, $(D', 1)$, $(D'', 1)$, $(D''', 1)$ et

*) L'équation (5) $n^0$4 ne donnerait rien de plus général.

à leurs composants suivant les arêtes de deux tétraèdres de référence: on obtient

$$\sin(D\,D')\sin(D''\,D''')\cos(D\,D',D''\,D''') \tag{49}$$

$$= \Sigma_{ef,\,ik,\,p'q',\,t'u'}\, c_{ef}\, c'_{ik}\, c''_{p'q'}\, c'''_{t'u'}\,.\sin(A_e\,A_f\,,A_i\,A_k)\sin(A_{p'}\,A_{q'}\,,$$
$$A_{t'}\,A_{u'})\cos[(A_e\,A_f\,,A_i\,A_k),(A_{p'}A_{q'}\,,A_{t'}\,A_{u'})]$$
$$\left(\begin{matrix}ef\\ ik\end{matrix} = 12,\ 34,\ 13,\ 42,\ 14,\ 23 \text{ et } \begin{matrix}p'q'\\ t'u'\end{matrix} = 1'2',\ldots\ldots\right)$$
$$= \Sigma\, y_{ef}\, y'_{ik}\, y''_{p'q'}\, y'''_{t'u'}\,.\,\delta_{gh}\,\delta_{mn}\,\delta_{r's'}\,\delta_{v'w'}\sin(A_g\,A_h\,,A_m\,A_n)$$
$$\times\sin(A_{r'}\,A_{s'}\,,A_{v'}\,A_{w'})\cos[(A_g\,A_h\,,A_m\,A_n),(A_{r'}\,A_{s'}\,,A_{v'}\,A_{w'})]$$
$$\left(\begin{matrix}efgh\\ ikmn\end{matrix} = 1234,\ 3412,\ 1342,\ 4213,\ 1423,\ 2314\right)$$
$$\text{et } \left(\begin{matrix}p'q'r's'\\ t'u'v'w'\end{matrix} = 1'2'3'4',\ldots\ldots\right)$$
$$= \left(\frac{4}{9\,V\,V'}\right)^2 \Sigma\, y_{ef}\, y'_{ik}\, y''_{p'q'}\, y'''_{t'u'}\,.\,a_e\ldots a_{u'}\sin(ef)\ldots\sin(t'\,u')$$
$$\times\sin(ef,ik)\sin(p'q',t'u')\cos[(ef,ik),(p'q',t'u')].$$

Si l'on fait coïncider D'' avec D et D''', avec D', on a trois expressions de $\sin(D\,D')$: la troisième est

$$\sin^2(D\,D') = \tag{50}$$
$$\left(\frac{4}{9\,V\,V'}\right)^2 \Sigma y_{ef}\, y_{p'q'}\, y'_{ik}\, y'_{t'u'}\,.\,a_e\ldots a_{u'}\sin(ef)\ldots\sin(t'u')\sin(ef,ik)$$
$$\times\sin(p'q',t'u')\cos[(ef,ik),(p'q',t'u')].$$

En remplaçant la valeur de $\sin(D\,D')$ donnée par cette formule, et la valeur analogue de $\sin(D''\,D''')$, dans la formule précédente, celle-ci donnera trois expressions de $\cos(D\,D'',D''\,D''')$, c'est-à-dire le cosinus de l'angle formé par un plan parallèle aux droites D, D' avec un plan parallèle aux droites D'', D'''.

Et en divisant l'expression de $mom(D\,D')$ trouvée plus haut par celle de $\sin(D,D')$, on obtient l'expression de la distance des droites $D\,D'$.

Si l'on efface les accents des indices p', q', r', s' et t', u', v', w', on obtient des formules relatives au cas le plus ordinaire d'un seul tétraèdre de référence.

Enfin la formule (48) donne

$$\sin(D\,D'\,D'') = \Sigma\, c_{ik}\, c'_{pq}\, c''_{tu}\sin(ik,pq,tu) \tag{51}$$
$$\left\{\begin{matrix}ik\\ pq\\ tu\end{matrix} = 12,\ 34,\ 13,\ 43,\ 14,\ 23\right\}$$

$$= \Sigma y_{ik} y'_{pq} y''_{tu} \,.\, \delta_{mn} \delta_{rs} \delta_{vw} \sin (A_m A_n, A_r A_s, A_v A_w)$$

$$\begin{Bmatrix} ikmn \\ pqrs \\ tuvw \end{Bmatrix} = 1234, 3412, 1342, 4213, 1432, 3214$$

$$= -\left(\frac{2}{3V}\right)^3 \Sigma\, y_{ik}\, y'_{pq}\, y''_{tu} \,.\, a_i \ldots a_u \sin (ik) \sin (pq) \sin (tu)$$

$$\times \sin (ik, pq, tu).$$

Transformation des coordonnées de droites en coordonnées de points et de plans.

27. Supposons que la droite D soit déterminée par deux points $A\alpha, A\beta$. Puisque le segment $A_m A_n$ est le résultant ordinaire de $A_m A\alpha$ et $A\alpha A_n$, le moment de $A_m A_n$ par rapport à la droite $A_i A_k$ ($ikmn$ étant toujours une permutation du groupe 1234 douée d'un nombre pair d'inversions) sera égal à la somme des moments de $A_m A\alpha$ et $A\alpha A_n$; et puisque les trois moments multipliés par $^1/_6 A_i A_k$ mesurent les volumes des tétraèdres $A_m A_n A_i A_k$, $A_m A\alpha\, A_i A_k$, $A\alpha A_n\, A_i A_k$, ainsi l'on a

$$A_m A_n A_i A_k = A_m A\alpha A_i A_k + A\alpha A_n A_i A_k,$$

et analoguement

$$A\alpha A\beta A_i A_k = A\alpha A_m A_i A_k + A_m A\beta A_i A_k.$$

En multipliant ces deux égalités entre elles, on trouve

$$A_m A_n A_i A_k \,.\, A\alpha A\beta A_i A_k = A\alpha A_n A_i A_k \,.\, A_m A\beta A_i A_k$$
$$+ A\alpha A_m A_i A_k (A\beta A_m A_i A_k + A_m A\alpha A_i A_k + A\alpha A_n A_i A_k);$$

et en remarquant que la somme entre les parenthèses équivaut à $A\beta A\alpha A_i A_k$, ou que $A\beta A n$ est le résultant ordinaire de $A\beta A_m$, $A_m A\alpha$, $A\alpha A_n$, on conclut que

$$A_m A_n A_i A_k, A\alpha A\beta A_i A_k =$$
$$A\alpha A_m A_i A_k \,.\, A\beta A_n A_i A_k - A\alpha A_n A_i A_k \,.\, A\beta A_m A_i A_k.$$

Mais on sait déjà que

$$A_m A_n A_i A_k = A_i A_k A_m A_n = V,\ A\alpha A\beta A_i A_k = \pm V \delta_{\alpha\beta}\, y_{ik}$$

($\delta_{\alpha\beta}$ désignant le segment $A\alpha A\beta$), et que

$$A\alpha A_m A_i A_k = A_i A_k A_m A\alpha = -{}^1/_3 a_n\, x\alpha n,\ A\beta A_n A_i A_k =$$
$$A_i A_k A\beta A_n = {}^1/_3 a_m\, x\beta m,$$
$$A\alpha A_n A_i A_k = A_i A_k A\alpha A_n = {}^1/_3 a_m\, x\alpha m,\ A\beta A_m A_i A_k =$$
$$- A_i A_k A_m A\beta = -{}^1/_3 a_n\, x\beta n;$$

donc la relation que l'on vient de trouver se réduit à

$$\pm y_{ik} = \frac{1}{9V^2} \cdot \frac{a_m a_n (x_{\alpha m} x_{\beta n} \quad x_{\alpha n} x_{\beta m})}{\delta_{\alpha\beta}} \tag{53}$$

ou

$$\pm y_{ik} = \frac{z_{\alpha m} z_{\beta n} - z_{\alpha n} z_{\beta m}}{\delta_{\alpha\beta}}, \tag{53)'$$

formule qui servira à transformer les coordonnées d'une droite en fonctions des coordonnées de deux points de la droite. Il faut prendre le signe $+$ lorsque $ik = 12, 34, 13, 42, 14, 23$ et le $-$ lorsque $ik = 21, 43, 31, 24, 41, 32$.

28. Supposons maintenant que la droite D soit donnée comme intersection de deux plans X_λ, X_μ; et désignons par A_α, A_β deux points de la droite, et par A_λ, A_μ les points où X_λ et X_μ coupent l'arête $A_i A_k$. Si dans la relation (52) trouvée ci-dessus on change $\alpha, \beta, m, n, i\, k$ en $i, k, \lambda, \mu, \alpha, \beta$, elle devient

$$A_\lambda A_\mu A_\alpha A_\beta \,.\, A_i A_k A_\alpha A_\beta =$$
$$A_i A_\lambda A_\alpha A_\beta \,.\, A_k A_\mu A_\alpha A_\beta - A_i A_\mu A_\alpha A_\beta \,.\, A_k A_\lambda A_\alpha A_\beta,$$

Or, de l'équation (14) du $n^o 7$ on tire

$$A_\lambda A_\mu A_\alpha A_\beta = -\,{}^2/_3\, \frac{A_\lambda A_\alpha A_\beta \,.\, A_\mu A_\alpha A_\beta \sin(X_\lambda X_\mu)}{A_\alpha A_\beta},$$

et on a d'ailleurs

$$A_i A_k A_\alpha A_\beta = \pm V A_\alpha A_\beta\, y_{ik},$$

$$A_i A_\lambda A_\alpha A_\beta = {}^1/_3 A_\lambda A_\alpha A_\beta \,.\, \xi_{\lambda i},\quad A_k A_\mu A_\alpha A_\beta = {}^1/_3 A_\mu A_\alpha A_\beta \,.\, \xi_{\mu k}$$
$$A_i A_\mu A_\alpha A_\beta = {}^1/_3 A_\mu A_\alpha A_\beta\, \xi_{\mu i},\quad A_k A_\lambda A_\alpha A_\beta = {}^1/_3 A_\lambda A_\alpha A_\beta \,.\, \xi_{\lambda k};$$

il résulte donc

$$\mp y_{ik} = \frac{\xi_{\lambda i}\, \xi_{\mu k} - \xi_{\lambda k}\, \xi_{\mu i}}{6 V \sin(X_\lambda X_\mu)} \tag{54}$$

ou

$$\pm y_{ik} = \frac{3V}{2 \sin(X_\lambda X_\mu)} \cdot \frac{\xi_{\lambda i}\, \xi_{\mu k} - \xi_{\lambda k}\, \xi_{\mu i}}{a_i a_k}, \tag{54)'$$

formule qui sert à passer des coordonnées de droites aux coordonnées de plans.

Ces deux transformations, que nous venons de développer sont bien fécondes: elles nous permettent d'établir un grand nombre de relations mètriques relatives aux coordonnées de points et de plans, par un procédé tout-à-fait différent de ceux que l'on a suivi jusqu'à présent. Notre procédé présente le double avantage de faire découler les dites relations d'une source unique, et de donner une explication satisfaisante de l'analogie entre les formules relatives aux coordonnées de points et celles relatives aux coordonnées de plans.

Relations mètriques en coordonnées de points.

29. Désignons par $A\alpha, A\beta$ deux points d'une droite D, et par $A\gamma$, $A\varepsilon$ deux points d'une autre droite D'. Si dans les formules (40), (40)' du n^0 23 on remplace les coordonnées de D, D' par les expressions équivalentes en coordonnées des points $A\alpha$ et $A\beta$, $A\gamma$ et $A\varepsilon$, on trouve

$$\delta\alpha\beta\,\delta\gamma\varepsilon\ \cos(D\,D') \tag{55}$$

$$= \Sigma_{ik,p'q'}\ z\alpha i\, z\beta k\, z\gamma p'\, z\varepsilon q' \,.\, \delta_{ik}\,\delta_{p'q'} \cos(A_i\ A_k\,,\, A_{p'}A_{q'})$$

$$(ik = 12,\ 34,\ 13,\ 42.\ 14,\ 23 \text{ et } p'q' = 1'2',\ldots),$$

$$\frac{(9\,V V')^3}{4a_1\ldots a_4\,a_{1'}\ldots a_{4'}}\,\delta\alpha\beta\ \delta\gamma\varepsilon\ \cos(D\,D') \tag{55'}$$

$$= \Sigma_{ikmn,\,p'q'r's'}\ x^{\alpha i}\, x\beta k\ x\gamma p' x\varepsilon p' \,.\, \sin(mn)\sin(r's')\cos(mn\,,\,r's')$$

$$(ikmn = 1234,\ 3412,\ 1342,\ 4213,\ 1423,\ 2314)$$

$$(p'q'r's' = 1'\,2'\,3'\,4',\ldots)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & x\alpha_1 & x\alpha_2 & x\alpha_3 & x\alpha_4 \\ 0 & 0 & x\beta_1 & x\beta_2 & x\beta_3 & x\beta_4 \\ x\gamma_{1'} & x\varepsilon_{1'} & \cos(1'1) & \cos(1'2) & \cos(1'3) & \cos(1'4) \\ x\gamma_{2'} & x\varepsilon_{2'} & \cos(2'1) & \cos(2'2) & \cos(2'3) & \cos(2'4) \\ x\gamma_{3'} & x\varepsilon_{3'} & \cos(3'1) & \cos(3'2) & \cos(3'3) & \cos(3'4) \\ x\gamma_{4'} & x\varepsilon_{4'} & \cos(4'1) & \cos(4'2) & \cos(4'3) & \cos(4'4) \end{vmatrix},$$

et de la formule (44) du n^0 24, ou des relations évidentes

$$x\alpha i - x\beta i = -\,\delta\alpha\beta\ \cos(D\,D^{(i)})\,,\ldots$$

combinées avec la formule (22) du n^0 9 après le changement de $X\alpha, X\beta, X_1,\ldots$ en $D, D', D^{(1)},\ldots$), on tire

$$-\,2\delta\alpha\beta\ \delta\gamma\varepsilon\ \cos(D\,D') = \Sigma_{ip'}\,(z\alpha i - z\beta i)\,(z\gamma p' - z\varepsilon p')\,\delta^2_{ip'} \tag{55''}$$

$$(i = 1,\ldots,4 \text{ et } p' = 1',\ldots,4').$$

On aurait des formes nouvelles en considérant les équations (19), (20), (21) au lieu de (22) n^0 9.

En faisant coïncider $A\gamma$ avec $A\alpha$ et $A\varepsilon$ avec $A\beta$, les formules précédentes deviennent

$$\delta^2\alpha\beta = \Sigma_{ik,p'q'}\, z\alpha i\, z\alpha p'\, z\beta k\, z\beta q'\ \delta_{ik}\,\delta_{p'q'}\ \cos(A_i\,A_k,\ A_{p'}\,A_{q'}), \tag{56}$$

$$\frac{(3\,V)^6}{4a_1\ldots a_4\,a_{1'}\ldots a_{4'}}\,\delta^2\alpha\beta \tag{56'}$$

$$= \Sigma_{ikmn,p'q'r's'}\ x\alpha i\ x\alpha p'\ x\beta k\ x\beta q' \,.\, \sin(mn)\sin(r's')\cos(mn,r's')$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & x\alpha_1 & x\alpha_2 & . \\ 0 & 0 & x\beta_1 & x\beta_2 & . \\ x\alpha_1' & x\beta_1' & cos(1'1) & cos(1'2) & . \\ x\alpha_2' & x\beta_2' & cos(2'1) & cos(2'2) & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

$$-\,2\delta^2\alpha\beta = \Sigma_{ip'}\,(z\alpha i - z\beta i)\,(z\alpha p' - z\beta p')\,\delta^2{}_{ip'}. \qquad (56)''$$

Les équations (56), (56)', (56)'' donnent, sous quatre formes différentes, la distance de deux points $A\alpha$, $A\beta$ déterminés par leurs coordonnées relatives à deux tétraèdres. Si l'on porte ces expressions de $\delta\alpha\beta$ et les analogues expressions de $\delta\gamma\varepsilon$ dans les formules (55), (55)', (55)'', on obtient, sous quatre formes différentes, le cosinus de l'angle formé par deux droites D, D' déterminées par couples de points.

Il est presqu'inutile de rappeler qu'en effaçant les accents de p', q', r', s', on a les formules relatives à un tétraèdre unique de référence.

Dans cette hypothèse, transformons l'équation (39)' du n^o23: nous aurons $\delta\alpha\beta$ $\delta\gamma\varepsilon$ mom (DD'), c'est-à-dire

$$\text{tétr. } A\alpha A\beta A\gamma A\varepsilon = V \begin{vmatrix} z\alpha_1 & z\alpha_2 & z\alpha_3 & z\alpha_4 \\ z\beta_1 & z\beta_2 & z\beta_3 & z\beta_4 \\ z\gamma_1 & z\gamma_2 & z\gamma_3 & z\gamma_4 \\ z\varepsilon_1 & z\varepsilon_2 & z\varepsilon_3 & z\varepsilon_4 \end{vmatrix} \qquad (57)$$

formule bien connue.

30. Désignons encore par D'', D''' les droites déterminées par les points $A\eta$ et $A\Theta$, $A\iota$ et $A\pi$; et transformons l'équation (49) du n^o26: il résulte

$$\delta\alpha\beta\,\delta\gamma\varepsilon\,\delta\eta\Theta\,\delta\iota\pi\, sin\,(DD')\, sin\,(D''D''')\, cos\,(DD', D''D''') \qquad (58)$$

$$= \Sigma_{ef,ik,p'q't'u'}\, z\alpha e\; z\beta f\; z\gamma i\; z\varepsilon k\; z\eta p'\; z\Theta q'\; z\iota t'\; z\pi u'\;.\; \delta_{ef}\,\delta_{ik}\,\delta_{p'q'}\,\delta_{t'u'}\, sin\,(A_e A_f, A_i A_k)$$

$$\times\, sin\,(A_{p'} A_{q'}, A_{t'} A_{u'})\, cos\,[(A_e A_f, A_i A_k), (A_{p'} A_{q'}, A_{t'} A_{u'})]$$

$$\left(\begin{matrix} ef \\ ik \end{matrix} = 12, 34, 13, 42, 14, 23 \text{ et } \begin{matrix} p'q' \\ t'u' \end{matrix} = 1'2', \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{(4a_1 \ldots a_4')^2}{(9VV')^6}\, \Sigma\, x\alpha e\, x\beta f \ldots\, x\tau t'\, x\pi u'\,.\, sin\,(gh)\, sin\,(mn)\, sin\,(r's')\, sin\,(v'w')$$

$$\times\, sin\,(gh, mn)\, sin\,(r's', v'w')\, cos\,[(gh, mn), (r s'vw')]$$

$$\left(\begin{matrix} efgh \\ ikmn \end{matrix} = 1234, 3412, 1342, 4213, 1423, 2314 \text{ et } \begin{matrix} p'q'r's' \\ t'u'v'w' \end{matrix} = \right.$$

$$\left. = 1'2'3'4', \ldots\right).$$

En faisant coïncider $A\eta$, $A\Theta$, $A\iota$, $A\pi$ avec $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, $A\varepsilon$, on tire de ces équations

$$\delta^2{}_{\alpha\beta}\,\delta^2{}_{\gamma\varepsilon}\,sin^2(DD') \tag{59}$$

$$= \Sigma z\alpha e z\beta f z\gamma i z\varepsilon k z\alpha p' z\beta q' z\gamma t' z\varepsilon u' \,.\, \delta_{ef}\delta_{ik}\,\delta_{p'q'}\,\delta_{t'u'}\,sin(A_e A_f, A_i A_k)\,sin(A_{p'}A_{q'}, A_{t'}A_{u'})$$
$$cos\,[(A_e A_f, A_i A_k), (A_{p'}A_{q'}, A_{t'}A_{u'})],$$

$$= \frac{(4a_1\ldots a_{4'})^2}{(9VV')^6}\,\Sigma x\alpha e\ldots. x\varepsilon k\, x\alpha p'\ldots x\varepsilon u' \,.\, sin(gh)\ldots sin(V'W')$$

$$sin(gh, mn)\,sin(r's', V'W')$$
$$cos\,[(gh, mn), (r's', V'W')].$$

De ces équations, combinées avec celles qui donnent $\delta^2{}_{\alpha\beta}$ et $\delta^2{}_{\gamma\varepsilon}$ [éq. (56), etc. n^o29], on a deux expressions de *sin* (DD'), c'est-à-dire du sinus de l'angle formé par deux droites determinées par couples de points. Si l'on porte dans les équations (58) les expressions de $\delta_{\alpha\beta}\ \delta_{\gamma\varepsilon}\ sin\ (DD')$ et les analogues de $\delta_{\eta\Theta}\ \delta_{\iota\pi}\ sin\ (D'', D''')$, on obtient deux expressions pour *cos* $(DD', D''D''')$, c'est-à-dire pour le cosinus de l'angle formé par deux plans, le premier parallele aux droites D, D', et le second aux droites D'', D''', ces droites étant déterminées par couples de points.

Enfin, de (51) il résulte

$$\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\gamma\varepsilon}\,\delta_{\eta\Theta}\,sin\,(DD'D'') = \Sigma_{ik,pq,tu}\, x\alpha i\, x\beta k\, x\gamma p\, x\varepsilon q\, x\eta t\, x\Theta u \,.\, \delta_{ik}\,\delta_{qp}\,\delta_{tu}$$
$$\times sin(A_i A_k, A_p A_q, A_t A_u), \tag{60}$$

formule, dont chaque membre représente *six* fois le volume d'un tétraèdre construit avec trois arêtes convergentes égales et paralleles à $\delta_{\alpha\beta}$, $\delta_{\gamma\varepsilon}$, $\delta_{\eta\Theta}$.

Relations métriques en coordonnées de plans.

31. Désignons par D l'intersection des deux plans $X\lambda$, $X\mu$ et par D' l'intersection des deux plans $X\nu$, $X\varrho$. Si dans les formules (40), (40)' du n^o23 on remplace les coordonnées de D, D' par leurs expressions en coordonnées des plans $X\lambda$ et $X\mu$, $X\nu$ et $X\varrho$, on a

$$(36VV')^2\,sin(\lambda\mu)\,sin(\nu\varrho)\,cos(\lambda\mu, \nu\varrho) \tag{61}$$
$$= \Sigma_{ikmn,p'q'r's'}\,\xi\lambda i\,\xi\mu k\,\xi\nu p\,\xi\varrho q \,.\, \delta_{mn}\,\delta_{r's'}\,cos\,(A_m A_n, A_{r'} A_{s'})$$

$(ikmn = 1234, 3412, 1342, 4213, 1423, 2314$ et $p'q'r's' = 1'2'3'4', \ldots)$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi\lambda_1 & \xi\lambda_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & \xi\mu_1 & \xi\mu_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & . \\ \xi\nu_1' & \xi\varrho_1' & 1 & \delta^2_{1'1} & \delta^2_{1'2} & . \\ \xi\nu_2' & \xi\varrho_2' & 1 & \delta^2_{2'1} & \delta^2_{2'2} & , \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix},$$

$$sin\,(\lambda\mu)\,sin\,(\nu\varrho)\,cos\,(\lambda\mu,\nu\varrho) \tag{61)'}$$
$$=\Sigma_{ik,p'q'}\,\zeta\lambda i\,\zeta\mu k\,\zeta\nu p'\,\zeta\varrho q'\,.\,sin\,(ik)\,sin\,(p'q')\,cos\,(ik,p'q')$$
$$(ik=12,34,13,42,14,23 \text{ et } p'q'=1'2',\ldots).$$

On a encore, en posant

$$\Xi\lambda\mu=\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \xi\lambda_1 & \xi\lambda_2 & \xi\lambda_3 & \xi\lambda_4 \\ \xi\mu_1 & \xi\mu_2 & \xi\mu_3 & \xi\mu_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

$$\frac{d\Xi\lambda\mu}{d\xi_i}\,Y_i, \text{ etc.};$$

par conséquent la formule (44) $n^o 24$ devient

$$-72\,VV'\,sin\,(\lambda\mu)\,sin\,(\nu\varrho)\,cos\,(\lambda\mu,\nu\varrho)=\Sigma_{ip'}\frac{d\Xi\lambda\mu}{d\xi_i}\cdot\frac{d\Xi'\nu\varrho}{d\xi_{p'}}\,\delta^2_{ip'},$$
$$(i=1,2,3,4 \text{ et } p'=1',\ldots).$$

Lorsqu'on fait coïncider $X\nu$ et $X\varrho$ avec $X\lambda$ et $X\mu$, les formules précédentes se réduisent à

$$-[36\,VV'\,sin\,(\lambda\mu)]^2 \tag{62}$$
$$=\Sigma_{ikmn,\,p'q'r's'}\,\xi\lambda i\,\xi\lambda p'\,\xi\mu k\,\xi\mu q'\,.\,\delta_{mn}\,\delta_{r's'}\,cos\,(A_m\,A_n\,,\,A_{r'}\,A_{s'})$$
$$\times\,cos\,(ik,p'q'),$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi\lambda_1 & \xi\lambda_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & \xi\mu_1 & \xi\mu_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & . \\ \xi\lambda_1' & \xi\mu_1' & 1 & \delta_{1'1} & \delta^2_{1'2} & . \\ \xi\lambda_2' & \xi\mu_2' & 1 & \delta^2_{2'1} & \delta^2_{2'2} & . \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix},$$

$$sin^2(\lambda\mu)=\Sigma_{ik,p'q'}\,\zeta\lambda i\,\zeta\lambda p'\,\zeta\mu k\,\xi\mu q'\,.\,sin\,(ik)\,sin\,(p'q') \tag{62)'}$$

$$-72\,VV'\,sin^2\,(\lambda\mu)=\Sigma_{ip'}\frac{d\Xi\lambda\mu}{d\xi_i}\cdot\frac{d\Xi'\lambda\mu}{d\xi_{p'}}\,\delta^2_{ip'}.$$

Ces équations donnent, sous quatre formes différentes, le sinus de l'angle formé par deux plans déterminés par leurs coordonnées relatives à deux tétraèdres. En portant ces expressions de *sin* $(\lambda\mu)$ et les analogues de *sin* $(\nu\varrho)$ dans les équations (61), ..., on obtient sous quatre formes différentes le cosinus de l'angle formé par deux droites $\lambda\mu$, $\nu\varrho$ déterminées par couples de plans.

En effaçant les accents des indices p', ... on a les formules relatives à un tétraèdre unique.

32. Dans cette hypothèse on peut appliquer la formule (48) du $n^o 25$ aux trois aires planes $(X_\lambda, 1)$, $(X_\mu, 1)$, $(X_\nu, 1)$; car nous avons remarqué au $n^o 17$ que ces aires ont respectivemeot pour composantes

$(X_1, \xi_{\lambda_1}), \ldots, (X_4, \xi_{\lambda_4}); (X_1, \xi_{\mu_1}), \ldots, (X_4, \xi_{\mu_4}); (X_1, \xi_{\nu_1}), \ldots, (X_4, X_{\nu_4})$: il vient:

$$\sin(\lambda\mu\nu) = \Sigma_{ikm}\, \zeta_{\lambda i}\, \zeta_{\mu k}\, \zeta_{\nu m} \sin(ikm) =$$

$$\frac{1}{(3V)^3}\, \xi_{\lambda i}\, \xi_{\mu k}\, \xi_{\nu m}\, a_i\, a_k\, a_m \sin(ikm);$$

$$\left\{\begin{matrix} i \\ k \\ m \end{matrix} = 1, 2, 3, 4\right\};$$

et puisque [éq. (15) $n^o 7$] $a_i\, a_k\, a_m \sin(ikm) = \pm \frac{9V^2}{2}$, selon que $ikmn$ représente une permutation du groupe 1, 2, 3, 4 douée d'un nombre pair ou impair d'inversions, ainsi on trouve

$$6V \sin(\lambda\mu\nu) = \Sigma \pm \xi_{\lambda i}\, \xi_{\mu k}\, \xi_{\nu m} = \begin{vmatrix} \xi_{\lambda_1} & .. & \xi_{\lambda_4} \\ \xi_{\mu_1} & .. & \xi_{\mu_4} \\ \xi_{\nu_1} & .. & \xi_{\nu_4} \\ 1 & .. & 1 \end{vmatrix}. \qquad (63)$$

Cela posé, nous allons transformer la formule (39)' du $n^o 23$. Elle devient

$$\sin(\lambda\mu) \sin(\nu\varrho) \operatorname{mom}(\lambda\mu, \nu\varrho) = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} \xi_{\lambda_1} & .. & \xi_{\lambda_4} \\ \xi_{\mu_1} & .. & \xi_{\mu_4} \\ \xi_{\nu_1} & .. & \xi_{\nu_4} \\ \xi_{\varrho_1} & .. & \xi_{\varrho_4} \end{vmatrix}; \qquad (64)$$

mais on a d'ailleurs *)

$$\frac{[sin\,(\lambda\mu)\;sin\,(\nu\varrho)\;mom\,(\lambda\mu,\,\nu\varrho)]^3}{sin\,(\mu\nu\varrho)\;sin\,(\nu\varrho\lambda)\;sin\,(\lambda\mu\varrho)\;sin\,(\mu\lambda\nu)} = 6 \text{ tétr. } X\lambda\, X\mu\, X\nu\, X\varrho\,; \quad (65)$$

donc il résulte

$$\text{tétr. } X\lambda\, X\mu\, X\nu\, X\varrho = V \frac{\begin{vmatrix} \xi\lambda_1 & \cdot\cdot & \xi\lambda_4 \\ \xi\mu_1 & \cdot\cdot & \xi\mu_4 \\ \xi\nu_1 & \cdot\cdot & \xi\nu_4 \\ \xi\varrho_1 & \cdot\cdot & \xi\varrho_4 \end{vmatrix}^3}{\begin{vmatrix} \xi\mu_1 & \cdot\cdot \\ \xi\nu_1 & \cdot\cdot \\ \xi\varrho_1 & \cdot\cdot \\ 1 & \cdot\cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi\nu_1 & \cdot\cdot \\ \xi\varrho_1 & \cdot\cdot \\ \xi\lambda_1 & \cdot\cdot \\ 1 & \cdot\cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi\varrho_1 & \cdot\cdot \\ \xi\lambda_1 & \cdot\cdot \\ \xi\mu_1 & \cdot\cdot \\ 1 & \cdot\cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi\lambda_1 & \cdot\cdot \\ \xi\mu_1 & \cdot\cdot \\ \xi\nu_1 & \cdot\cdot \\ 1 & \cdot\cdot \end{vmatrix}}, \quad (66)$$

équation qui donne le volume d'un tétraèdre en fonction des coordonnées de ses faces.

33. Désignons encore par D'' l'intersection des plans $X\sigma$, $X\tau$ et par D''' l'intersection des plans $X\varphi$, $X\psi$; et transformons l'équation (49) du n^o26: il vient

$$\iota\,(\lambda\mu)\;sin\,(\nu\varrho)\;sin\,(\sigma\tau)\;sin\,(\varphi\psi)\;sin\,(DD')\;sin\,(D''D''')\;cos\,(DD',\,D''D''') \quad (67)$$

$$= \frac{1}{(36\,V V')^2}\, \xi\lambda e\, \xi\mu f\, \xi\nu i\, \xi\sigma k\, \xi\varrho p'\, \xi\tau q'\, \xi\varphi t'\, \xi\psi u' \,.\, \delta_{gh}\, \delta_{mn}\, \delta_{r's'}\, \delta_{v'w'}$$

$$\times\, sin\,(A_g A_h,\, A_m A_n)\; sin\,(A_{r'} A_{s'},\, A_{v'} A_{w'})\; cos\,[(A_g A_h,\, A_m A_n),\, (A_{r'} A_{s'},\, A_{v'} A_{w'})]$$

$$\left(\frac{efgh}{ikmn} = 1234, 3412, 1342, 4213, 1423, 2314, \text{ et } \frac{p'q'r's'}{t'u'v'w'} = 1'2'3'4', \ldots\right)$$

---

*) En effet, de (14) n^o7 on tire

$$\frac{9\,V^2}{2a_1 a_2 a_3 a_4} = \frac{2 sin\,(ik)\,sin\,(mn)}{\delta_{ik}\,\delta_{mn}} = \frac{sin\,(ik)\,sin\,(mn)\,mom\,(ik\,,mn)}{3\,V},$$

et de (15)

$$\frac{(3\,V)^3}{2^4(a_1 a_2 a_3 a_4)}\,3 = sin\,(kmn)\,sin\,(mni)\,sin\,(nik)\,sin\,(ikm)$$

En divisant la première équation élevée au cube, par la deuxième, on a

$$6\,V = \frac{[sin\,(ik)\,sin\,(mn)\,mom\,(ik\,,mn)]^3}{sin\,(kmn)\,sin\,(mni)\,sin\,(nik)\,sin\,(ikm)}.$$

Il suffit de changer X_i, X_h, X_m, X_n en X_λ, X_μ, X_ν, X_ϱ pour obtenir la formule du texte.

$$=\left(\frac{9VV'}{4}\right)^2 \Sigma \zeta\lambda e \ldots \zeta\psi u \,.\, sin\,(ef)\, sin\,(ik)\, sin\,(p'q')\, sin\,(t'u')$$
$$\times sin\,(ef, ik)\, sin\,(p'q't'u')\, cos\,[(ef, ik), (p'q', t'u')]$$
$$\left(\begin{matrix} ef \\ ik \end{matrix} = 12, 34, 13, 42, 14, 23 \text{ et } \begin{matrix} p'q' \\ t'u' \end{matrix} = 1'2', \ldots\right).$$

Si l'on fait coïncider X_σ, X_τ, X_φ, X_ψ avec X_λ, X_μ, X_ν, X_ϱ on a

$$[sin\,(\lambda\mu)\, sin\,(\nu\varrho)\, sin\,(DD')]^2 \tag{68}$$
$$= \frac{1}{(36\,VV')^2} \Sigma\, \xi\lambda e\, \xi\mu f\, \xi\nu i\, \xi\varrho k\, \xi\lambda p'\, \xi\mu q'\, \xi\nu t'\, \xi\varrho u' \,.\, \delta_{gh}\, \delta_{mn}\, \delta_{r's'}\, \delta_{v'vv'}$$
$$\times sin\,(A_g A_h\, A_m A_n)\, sin\,(A_{r'} A_{s'}, A_{v'} A_{vv'})\, cos\,[(A_g A_h, A_m A_n),$$
$$(A_{r'} A_{s'}, A_{v'} A_{vv'})]$$
$$=\left(\frac{9VV'}{4}\right)^2 \Sigma \zeta\lambda e \ldots \zeta\varrho u \,.\, sin\,(ef)\, sin\,(ik)\, sin\,(p'q')\, sin\,(t'u')$$
$$\times sin\,(ef, ik)\, sin\,(p'q', t'u')\, cos\,[(ef, ik), (p'q', t'u')].$$

Des formules (68), combinées avec (62),... qui donnent $sin\,(\lambda\mu)$ et, par conséquent, $sin\,(\nu\varrho)$, on tire deux expressions de $sin\,(DD')$, c'est-à-dire du sinus de l'angle de deux droites déterminées par couples de plans. Si l'on porte dans les formules (67) les expressions de $sin\,(\lambda\mu)\, sin\,(\nu\varrho)\, cos\,(DD')$ données par (68), et les analogues de $sin\,(\varrho\tau)\, sin\,(\varphi\psi)\, cos\,(D''D''')$, on obtient deux expressions de $cos\,(DD', D''D''')$, c'est-à-dire du cosinus de l'angle formé par deux plans; le premier parallèle aux droites D, D', et le second aux droites D'', D''', ces quatre droites étant déterminées par couples de plans.

Enfin de (51) on déduit

$$sin\,(\lambda\mu)\, sin\,(r\varrho)\, sin\,(\sigma\tau)\, sin\,(DD'D'')$$
$$= \frac{1}{(6\,V)^3} \Sigma\, \xi\lambda i\, \xi\mu k\, \xi\nu p\, \xi\sigma q\, \xi\sigma t\, \xi\tau u \,.\, \delta_{mn}\, \delta_{rs}\, \delta_{vw}\, sin\,(A_m A_n, A_r A_s, A_v A_{vv})$$
$$\left\{\begin{matrix} ikmn \\ pqrs \\ tuvw \end{matrix} = 1234, 3412, 1342, 4213, 1423, 2314\right\}$$
$$=\left(\frac{3V}{2}\right)^3 \Sigma\, \zeta\lambda i \ldots \zeta\tau u \,.\, sin\,(ik)\, sin\,(pq)\, sin\,(tu)\, sin\,(ik, mn, tu)$$
$$\left\{\begin{matrix} ik \\ mn \\ tu \end{matrix} = 12, 34, 13, 42, 14, 23\right\}.$$