

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

František Josef Studnička

O vzorci vyjadřujícím plochu trojúhelníku pomocí stran jeho

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 1 (1872), No. 5, 253--255

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122696>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1872

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

$$\eta^2(1 + \eta'^2) = r^2, \quad (10)$$

z nichž jen třeba vyloučiti pomocí rovnice (2) veličiny  $r$  a  $r'$ , aby se obdržela differenciální rovnice hledané trochoidy.

Podobné zjednodušení možná provésti pro ten případ, že se hledá půdlice nějaké křivky, jejíž trochoida jest přímka.

Neb zvolíme-li i tu přímku tuto za osu úseček, bude

$$\eta = 0, \quad \eta' = 0,$$

načež ze soustavy rovnic (7) a (8) obdržíme jednoduché vzorce

$$-y' = \frac{r'}{r}, \quad (11)$$

$$y = r, \quad (12)$$

jejichž geometrický význam jest tak patrný jako v případech předcházejícím.

## O vzorci vyjadřujícím plochu trojúhelníku pomocí stran jeho.

(Podle Baltzera podává dr. *F. J. Studnička*.)

Značí-li  $a$ ,  $b$ ,  $c$  strany trojúhelníka a  $s$  poloviční obvod, est p locha jeho  $\Delta$  určena vzorcem

$$\Delta^2 = s \cdot (s - a) (s - b) (s - c),$$

což ponejprv se vyskytuje ve spisech Heronových, jichž alexandrinští užívali co kompendia praktické geometrie a považovali za doplněk elementů Euklidových, jakž *Letronne* a *Martin* dokázali.

Poučka tato obsažena jest v Heronově geodaesii bez důkazu, v úplném spisu geodaetickém *περὶ διόπτρας* s důkazem, jež *Venturi* r. 1814 (Com. sopra le storia e le teorie dell' ottica t. 1.) uveřejnil, načež v původním znění od *Vincenta* (Notices et extraits de MS. de le bibl. impér. t. 19, II. pag. 286) a *Hultsche* (Heronis reliquiae p. 235 a Zeitschr. f. Mbth. IX. p. 225) byl uveden.

Jiný starý důkaz této poučky sdělil podlé *Pacioliho* ve své trigonometrii (p. 109 a 374) *Pfleiderer*. Důkaz tento, jež *Venturi* nalezl u *Leonarda Pisana* (Practica geometriae 1220;

ed. Boncampagni p. 40), jest velmi jednoduchý a zasluhuje, aby se ho více všimalo, nežli se dosud děje.

Značí-li v trojúhelníku  $ABC$  (ob. 80) středy kruhů vepsaných  $D$  a  $D'$ , poloměry jejich  $d$  a  $d'$  a délky tečen

$$AE = AF = \alpha, BF = BJ = \beta, CE = CJ = \gamma,$$

$$AL = AK = \alpha', BH = RK = \beta', CH = CL = \gamma'$$

a s poloviční objem, tu platí patrně

$$\alpha + \beta + \gamma = s, \alpha' - \beta' - \gamma' = s - a,$$

načež snadno si zjednáme, spojíme-li první rovnici tuto jednou s  $\gamma = a - \beta$ , na to s  $\alpha = b - \gamma$ , vzorce

$$\alpha = s - a, \beta = s - b,$$

a spojíme-li podobně druhou rovnici předešlou jednou s  $\beta' + \gamma' = a$ , podruhé s  $\alpha' - \gamma' = b$ , taktéž vzorce

$$\alpha' = s, \beta' = s - c;$$

a poněvadž  $AED \sim AD'L$ , bude

$$d : d' = \alpha : \alpha'$$

a mimo to, poněvadž  $DFB \sim BKD'$ , podobně

$$d : \beta = \beta' : d',$$

z kterýchžto dvou srovnalostí jde dále

$$\alpha' d^2 = \alpha \beta \beta',$$

aneb' dosadíme-li známé hodnoty za  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$ ,

$$sd^2 = (s - a)(s - b)(s - c);$$

povážíme-li konečně, že

$$ADB + BDC + CDA = \Delta$$

$$\text{tedy } ad + bd + cd = 2\Delta,$$

z čehož snadno si zjednáme

$$\Delta^2 = d^2 s^2,$$

obdržíme konečně, použivše předposledního vzorce,

$$\Delta^2 = s(s - a)(s - b)(s - c).$$

Zároveň tu obdržíme pro úhly ještě vzorce známé

$$tg \frac{A}{2} = \frac{d}{s - a}; \quad tg \frac{B}{2} = \frac{d}{s - b}, \quad tg \frac{C}{2} = \frac{d}{s - c},$$

Méně jednoduchý jest důkaz Heronův, v němž se používá místo středu  $D'$  bodu proti  $A$  ležícího v kruhu vepsaném. Podobných pomůcek užívá též *Euler* (*Variae demonstrationes in Nov. Comm. Petrop. 1*), aby dokázal vzorec pro  $\Delta^2$ . Bližší pomůcky volil *Castillon*, jehož důkaz opakuje *Baltzer* v *Elem. der Math. II. pag. 122*.

Ostatně sotva byl vzorec svrchu uvedený způsobem tím vynalezen, jaký shledáváme u Herona, Eulera a Castillona; nejspíše přišlo se k němu pouhým počtem, nikoli ale cestou geometrickou. Neb známá početní dedukce pro  $\mathcal{A}^2$ , jakou shledáváme u *Newtona* (Arithm. universalis probl. geom. 11.), a od té doby v rozmanitých knihách učebných, zakládá se na úkonech, kteréž byly starým geometrům velmi dobře známy. Kterážto domněnka ještě tím více nabývá váhy, povážíme-li, že staří Indové (Brahmegupta v VI. stol. po Kr.) obdobný vzorec pro plochu trojúhelníku do kruhu vepsaného znali. \*) A že by indiští geometrové byli neodvislí od řeckých předchůdců, nelze více tvrditi od té doby, co *Albrecht Webr* svými přednáškami o literatuře indické opak toho dokázal; nejspíše se ku vzorci pro čtyřúhelník platícím přišlo počtem podobným tomu, jaký se provádí při trojúhelníku. \*\*)

Zajímavé jsou též poznámky, jež prof. *Möbius* při svých přednáškách r. 1840 o vzorci pro  $\mathcal{A}^2$  učinil.

Poněvadž plocha jest co do znamení neodvislá od označení stran, musí býti  $\mathcal{A}^2$  funkcí veličin  $a^2, b^2, c^2$  a sice souměrnou i stejnoměrnou. Plocha  $ABC$  stane se 0, leží-li body  $A, B, C$  na jedné přímce, platí-li tedy podmínka

$$BC + CA + AB = 0.$$

Je-li tedy  $\mathcal{A}^2$  celistvou funkcí veličin  $a, b, c$ , musí se dáti dělití trinomy

$$a + b + c, a - b + c, a + b - c, a - b - c$$

a tudíž i součinem těchto výrazů aneb mří od  $a, b, c$  neodvislý poměr k determinantu souměrnému

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & 0 \\ b, & a, & 0, & c \\ c, & 0, & a, & b \\ 0, & c, & b, & a \end{vmatrix}$$

(Berichte über die Verhandl. der k. sächs. Gesellsch. der Wiss. zu Leipzig, math. phys. Classe, XVII. Bd. 1865. pag. 3.)

\*) Porovnej řešení 7. úlohy mathematické v III. sešitu tohoto časopisu na str. 153 od K. Zahradníka uveřejněné, jakož i poznámku na str. 154. připojenou.

\*\*) Srovnej „Arneth“ Geschichte der reinen Mathematik, pag. 145 et seq.