Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Juraj Hronec

Algebraické rovnice pre koeficienty lin. dif. systémov pri $n = 2, \sigma = 2$

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 2, 80--85

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122734

Algebraické rovnice pre koeficienty lin. dif. systémov pri $n=2$, $\sigma=2$.

Napísal *J. Hronec.*

V článku „K Fuchsovým reláciam"*) ukázal som, že udáme-li u lin. dif. systému Fuchsovho týpu sing. body a_ν ($\nu=1, 2 \ldots . \sigma$) a korene k nim patriacich determinujúcich rovníc, vtedy pre koeficienty $b_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}$ ($\lambda, \varkappa = 1, 2 \ldots . n$, $\nu = 0, 1 \ldots . \sigma-1$) lin. dif. systému:

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa},$$

kde je:

$$a_{\lambda\varkappa} = \frac{b_{\lambda\varkappa}^{(0)} + b_{\lambda\varkappa}^{(1)} x + \cdots + b_{\lambda\varkappa}^{(\sigma-1)} x^{\sigma-1}}{(x-a_1)(x-a_2) \ldots . (x-a_\sigma)} = \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{B_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x-a_\nu};$$

máme $n\sigma$ algebraickych rovníc a zbýva ešte $n\sigma(n-1)-1$ ľubovolných konstantných hodnôt.

Nižšie určím explicitný tvar týchto algebraických rovníc pri $n=2$, $\sigma=2$. Sem patriaci lin. dif. systém Fuchsovho týpu je:

$$A) \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{b_{11}x + c_{11}}{(x-a_1)(x-a_2)} y_1 + \dfrac{b_{12}x + c_{12}}{(x-a_1)(x-a_2)} y_2 \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{b_{21}x + c_{21}}{(x-a_1)(x-a_2)} y_1 + \dfrac{b_{22}x + c_{22}}{(x-a_1)(x-a_2)} y_2 \end{cases}$$

Cieľom jednoduchosti označme:

$$b_{11}x + c_{11} = g_{11}(x), \quad b_{12}x + c_{11} = g_{12}(x),$$
$$b_{21}x + c_{21} = g_{21}(x), \quad b_{22}x + c_{22} = g_{22}(x)$$

a vtedy normálny tvar systému $A)$ ohľadom sing. bodu $x=a_1$ je:

$$(x-a_1)\frac{dy_1}{dx} = \frac{g_{11}(x)}{x-a_2} y_1 + \frac{g_{12}(x)}{x-a_2} y_2$$

$$(x-a_1)\frac{dy_2}{dx} = \frac{g_{21}(x)}{x-a_2} y_1 + \frac{g_{22}(x)}{x-a_2} y_2$$

---

*) Časopis pro pěstování mat. a fys. LVI. čís. 1.

a ohľadom sing. bodu $x = a_2$ je zase:

$$(x-a_2)\frac{dy_1}{dx} = \frac{g_{11}(x)}{x-a_1}y_1 + \frac{g_{12}(x)}{x-a_1}y_2$$

$$(x-a_2)\frac{dy_2}{dx} = \frac{g_{21}(x)}{x-a_1}y_1 + \frac{g_{22}(x)}{x-a_1}y_2.$$

Determinujúce rovnice, patriace k týmto sing. bodom, sú:

$$\begin{vmatrix} B_{11}^{(1)} - r & B_{12}^{(1)} \\ B_{21}^{(1)} & B_{22}^{(2)} - r \end{vmatrix} = 0,$$

poťažne:

$$\begin{vmatrix} B_{11}^{(2)} - r & B_{12}^{(1)} \\ B_{21}^{(2)} & B_{22}^{(2)} - r \end{vmatrix} = 0,$$

kde je:

$$1.)\left\{\begin{array}{l} B_{11}^{(1)} = \frac{g_{11}(a_1)}{a_1-a_2},\ B_{12}^{(1)} = \frac{g_{12}(a_1)}{a_1-a_2},\ B_{21}^{(1)} = \frac{g_{21}(a_1)}{a_1-a_2},\ B_{22}^{(1)} = \frac{g_{22}(a_1)}{a_1-a_2} \\ B_{11}^{(2)} = -\frac{g_{11}(a_2)}{a_1-a_2},\ B_{12}^{(2)} = -\frac{g_{12}(a_2)}{a_1-a_2}, \\ \qquad B_{21}^{(2)} = -\frac{g_{21}(a_2)}{a_1-a_2},\ B_{22}^{(2)} = -\frac{g_{22}(a_2)}{a_1-a_2}. \end{array}\right.$$

Z týchto dostaneme, že je:

$$2.)\quad \begin{array}{l} b_{11} = B_{11}^{(1)} + B_{11}^{(2)} \\ b_{12} = B_{12}^{(1)} + B_{12}^{(2)} \\ b_{21} = B_{21}^{(1)} + B_{21}^{(2)} \\ b_{22} = B_{22}^{(1)} + B_{22}^{(2)}. \end{array}$$

Explicitný tvar determinujúcich rovníc je:

$$r^2 - r\frac{g_{11}(a_1) + g_{22}(a_1)}{a_1 - a_2} + \frac{g_{11}(a_1)\cdot g_{22}(a_1) - g_{12}(a_1)\cdot g_{21}(a_1)}{(a_1 - a_2)^2} = 0.$$

$$r^2 + r\frac{g_{11}(a_2) + g_{22}(a_2)}{a_1 - a_2} + \frac{g_{11}(a_2)\cdot g_{22}(a_2) - g_{12}(a_2)\cdot g_{21}(a_2)}{(a_1 - a_2)^2} = 0.$$

Označíme-li korene týchto rovníc $r_1^{(1)}$, $r_2^{(1)}$, poťažne $r_1^{(2)}$, $r_2^{(2)}$, vtedy je:

$$3a)\qquad r_1^{(1)} + r_2^{(1)} = \frac{(b_{11} + b_{22})\,a_1 + c_{11} + c_{22}}{a_1 - a_2},$$

$$3b)\qquad r_1^{(2)} + r_2^{(2)} = -\frac{(b_{11} + b_{22})\,a_2 + c_{11} + c_{22}}{a_1 - a_2},$$

$$4a)\quad r_1^{(1)} \,.\, r_2^{(1)} = \frac{(b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21})\, a_1^2 + (b_{11} c_{22} - b_{12} c_{21} +}{(a_1 - a_2)^2}$$
$$\frac{+ c_{11} b_{22} - c_{12} b_{21})\, a_1 + c_{11} c_{12} - c_{12} c_{21}}{(a_1 - a_2)^2}$$

$$4b)\quad r_1^{(2)} \,.\, r_2^{(2)} = \frac{(b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21})\, a_2^2 + (b_{11} c_{22} - b_{12} c_{21} +}{(a_1 - a_2)^2}$$
$$\frac{+ c_{11} b_{22} - c_{12} b_{21})\, a_2 + c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}}{(a_1 - a_2)^2}.$$

Z rovníc $3a$) a $3b$) plynú:

$$\text{I.}\quad b_{11} + b_{22} = r_1^{(1)} + r_2^{(1)} + r_1^{(2)} + r_2^{(2)},$$

$$\text{II.}\quad c_{11} + c_{22} = -[(r_1^{(1)} + r_2^{(1)})\, a_2 + (r_1^{(2)} + r_2^{(2)}) a_1];$$

a z rovníc $4a$) a $4b$) je zase:

$$5.)\quad r_1^{(1)} r_2^{(1)} - r_1^{(2)} r_2^{(2)} = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} (a_1 + a_2)}{a_1 - a_2} +$$
$$+ b_{11} c_{22} - b_{12} c_{21} + c_{11} b_{22} - c_{12} b_{21}.$$

Normálny tvar lin. dif. systému A), patriaci k sing. bodu $x = \infty$, dostaneme, keď dosadíme $x = \frac{1}{\xi}$ a určíme normálny tvar tohoto systému, patriaci k $\xi = 0$, ktorý bude:

$$\xi \frac{dy_1}{d\xi} = -\frac{b_{11} + c_{11}\xi}{\varphi_1(\xi)} y_1 - \frac{b_{12} + c_{12}\xi}{\varphi_1(\xi)} y_2 \,.$$

$$\xi \frac{dy_2}{d\xi} = -\frac{b_{21} + c_{21}\xi}{\varphi_1(\xi)} y_1 - \frac{b_{22} + c_{22}\xi}{\varphi_1(\xi)} y_2,$$

kde je: $\qquad \varphi_1(\xi) = (1 - a_1 \xi) \,.\, (1 - a_2 \xi).$

Determinujúca rovnica, patriaca k sing. bodu $x = \infty$ je:

$$\begin{vmatrix} B_{11}^{(3)} - r & B_{12}^{(3)} \\ B_{21}^{(3)} & B_{22}^{(3)} - r \end{vmatrix} = 0,$$

kde je: 6.) $B_{11}^{(3)} = -b_{11}$, $B_{21}^{(3)} = -b_{12}$, $B_{21}^{(3)} = -b_{21}$, $B_{22}^{(3)} = -b_{22}$.

Z rovníc 2) a 6.) vyplýva relácia 4.*)

Dosadíme-li 6.) do determinujúcej rovnice máme:

$$r^2 + r\,(b_{11} + b_{22}) + b_{11} \,.\, b_{22} - b_{12} \,.\, b_{21} = 0.$$

Označíme-li korene tejto rovnice $r_1^{(3)}$, $r_2^{(3)}$, vtedy je:

$$7.)\quad b_{11} + b_{22} = -(r_1^{(3)} + r_2^{(3)},$$

$$\text{III.}\quad b_{11} \,.\, b_{22} - b_{12} \,.\, b_{21} = r_1^{(3)} \,.\, r_2^{(3)}.$$

*) K Fuchsovým reláciam. Časopis LVI. čís. 1.

Dosadíme-li III. do 5. máme:

IV. $$b_{11} c_{22} - b_{12} c_{21} + c_{11} b_{22} - c_{12} b_{21} =$$
$$= r_1^{(1)} r_2^{(1)} - r_1^{(2)} r_2^{(2)} - r_1^{(3)} r_2^{(3)} \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}$$

a keď zase III. a IV. dosadíme do $4a$, tak je:

V. $$c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} = r_1^{(1)} r_2^{(1)} (a_1 - a_2)^2 - r_1^{(3)} r_2^{(3)} a_1^2 +$$
$$+ \left[r_1^{(2)} r_2^{(2)} - r_1^{(1)} r_2^{(1)} + r_1^{(3)} r_2^{(3)} \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \right] a_1 .$$

Rovnice I.—V. určia explicite koeficienty b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} dif. systému A), z ktorých ešte tri koeficienty zostanú neurčité parametry. Jestliže tieto tri sú nula, vtedy máme tak zvaný *accessorický* prípad, ktorý dostaneme, prevedeme-li Riemannovú dif. rovnicu*)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{ax + b}{(x - a_1)(x - a_2)} \frac{dy}{dx} + \frac{cx^2 + ex + f}{(x - a_1)^2 (x - a_2)^2} y = 0$$

substitúciou $y = y_1$, $\frac{dy_1}{dx} = y_2$ do systémn dif. rovníc a síce:

$$B) \quad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= -\frac{cx^2 + ex + f}{\varphi(x)} y_1 - \frac{ax + b}{\varphi(x)} y_2, \end{aligned}$$

kde je: $\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2)$.

Systém B prejde substitúciou

$$y_2 = \frac{z_2}{x - a_\nu}$$

do tvaru kanonického a normálného ohľadom sing. bodu $x = a_\nu$, a síce:

$$(x - a_\nu) \frac{dy_1}{dx} = y_2$$
$$(y - a_\nu) \frac{dy_2}{dx} = -(cx^2 + ex + f) \left(\frac{x - a_\nu}{\varphi(x)} \right)^2 y_1 + \left[1 - (ax + b) \frac{x - a_\nu}{\varphi(x)} \right] y_2,$$

píšeme-li namiesto z_2 zase y_2 a kde je $\nu = 1 . 2$.

Determinujúca rovnica tohoto systému, patriaca k sing. bodu $x = a_1$ je:

$$\begin{vmatrix} -r & 1 \\ -\frac{ca_1^2 + ea_1 + f}{(a_1 - a_2)^2} & 1 - \frac{aa_1 + b}{a_1 - a_2} - r \end{vmatrix} = 0,$$

*) L. Schlesinger: Differentialgleichungen. Leipzig 1900. Str. 123.

alebo:
$$r^2 - r\left[1 - \frac{aa_1 + b}{a_1 - a_2}\right] + \frac{ca_1^2 + ca_1 + f}{(a_1 - a_2)^2} = 0$$
a k sing. bodu $x = a_2$ zase:
$$r^2 - r\left[1 + \frac{aa_2 + b}{a_1 - a_2}\right] + \frac{ca_2^2 + ea_2 + f}{(a_1 - a_2)^2} = 0.$$
Označíme-li korene týchto rovníc $r_1^{(1)}$, $r_2^{(1)}$; poť. $r_1^{(2)}$, $r_2^{(2)}$, vtedy je:

8*a*) $$r_1^{(1)} + r_2^{(1)} = 1 - \frac{aa_1 + b}{a_1 - a_2},$$

8*b*) $$r_1^{(2)} + r_2^{(2)} = 1 + \frac{aa_2 + b}{a_1 - a_2},$$

9*a*) $$r_1^{(1)} \,.\, r_2^{(1)} = \frac{ca_1^2 + ea_1 + f}{(a_1 - a_2)^2},$$

9*b*) $$r_1^{(2)} \,.\, r_2^{(2)} = \frac{ca_2^2 + ea_2 + f}{(a_1 - a_2)^2}.$$

Z rovníc 8*a* a 8*b* máme:

I. $$a = 2 - r_1^{(1)} - r_2^{(1)} - r_1^{(2)} - r_2^{(2)}$$

II. $$b = (1 - r_1^{(1)} - r_2^{(1)})\, a_2 + (1 - r_1^{(2)} - r_2^{(2)})\, a_1$$

a z rovníc 9*a* a 9*b* zase je:

10.) $$r_1^{(1)} r_2^{(1)} - r_1^{(2)} r_2^{(2)} = \frac{c(a_1 + a_2) + e}{a_1 - a_2}.$$

Kanonický a normálny tvar systému *B*, patriaci k sing. bodu $x = \infty$ dostaneme, dosadíme-li $x = \frac{1}{\xi}$, potom dosadíme $y_2 = \xi z_2$ a ten bude, píšeme-li na miesto z_2 zase y_2:
$$\xi \frac{dy_1}{d\xi} = \qquad\qquad - y_2$$
$$\xi \frac{dy_2}{d\xi} = \frac{c + e\xi + f\xi^2}{\varphi_1(\xi)}\, y_1 + \left[-1 + \frac{a + b\xi}{\varphi_1(\xi)}\right] y_2,$$
kde je: $$\varphi_1(\xi) = (1 - a_1\xi)(1 - a_2\xi).$$

Determinujúca rovnica, patriaca $x = \infty$ je teda:
$$\begin{vmatrix} -r & -1 \\ c & -1 + a - r \end{vmatrix} = 0,$$
alebo
$$r^2 - r(-1 + a) + c = 0;$$
zkadiaľ je, označíme-li korene tejto rovnice $r_1^{(3)}$, $r_2^{(3)}$,

III. $$c = r_1^{(3)} \,.\, r_2^{(3)}$$

11.) $$a = 1 + r_1^{(3)} + r_2^{(3)}.$$

Z rovníc I. a 11. dostaneme známu reláciu Fuchsovú pre korene determinujúcich rovníc lin. dif. rovníc:

12.) $$r_1^{(1)} + r_2^{(1)} + r_1^{(2)} + r_2^{(2)} + r_1^{(3)} + r_2^{(3)} = 1.$$

Dosadíme-li hodnotu c z III. do 10. máme:

IV. $$e = (r_1^{(1)} r_2^{(1)} - r_1^{(2)} r_2^{(2)})\,(a_1 - a_2) - r_1^{(3)} r_2^{(3)}\,(a_1 + a_2).$$

Konečne z $9a$, keď vezmeme III. a IV. do ohľadu, máme:

V. $$f = (a_1 - a_2)\,[r_1^{(2)} r_2^{(2)} - r_1^{(1)} r_2^{(1)} a_2] + r_1^{(3)} r_2^{(3)} a_1 a_2.$$

Vezmeme-li $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, vtedy máme jednoduché relácie pre koeficienty, ale i pre korene determinujúcich rovníc lin. dif. systému B a síce:

$$\begin{aligned}
a &= 2 - r_1^{(1)} - r_2^{(1)} - r_1^{(2)} - r_2^{(2)} \\
b &= 1 - r_1^{(2)} - r_2^{(2)} \\
c &= r_1^{(3)}\, r_2^{(3)} \\
e &= r_1^{(1)}\, r_2^{(1)} - r_1^{(2)}\, r_2^{(2)} - r_1^{(3)}\, t_2^{(3)} \\
f &= r_1^{(2)}\, r_2^{(2)},
\end{aligned}$$

kde na korene det. rovníc platí ešte relácia 12.

*

Les équations algébriques pour les coëfficients de systèmes différentiels linéaires: cas $n = 2$, $\sigma = 2$.

(Extrait de l'article précédent.)

Étant donné un système différentiel linéaire A, réduisons-le, par rapport aux points singuliers, à la forme normale. A l'aide de ces points on établit les équations déterminantes, qui sont quadratiques; on en déduit, d'une manière simple, cinq équations pour les huit constantes. On procède d'une manière analogue dans le cas nommé accessoire, où il y a autant de coefficients que de racines indépendantes des équations déterminantes et autant d'équations linéaires indépendantes.