

# Časopis pro pěstování matematiky a fyziky

---

Jan Mařík

Odhad prosté hodnoty integrálů a kriteria pro konvergenci nevlastních integrálů

Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, Vol. 73 (1948), No. 4, D49--D52

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122810>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1948

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

$\overline{SN} = \overline{{}^1S^1N}$  na  $r \parallel C'C''$ ; bodem  ${}^1N$  vedená přímka  ${}^1N^2N \parallel {}^1V^1S$  dává bod  ${}^2N$  a  ${}^2N^1V = \overline{SK}'$ .

Chceme-li obdobu pro shodné a souosé paraboly o ose  $p$  (obr. 3), vytkneme si bod  $\delta$  a od něho ve vzdálenosti parametru kolmici  $d$  k ose. Kolmici  $n$  v bodě  $K$  bez rýsování pomocných čar vyhledáme takto: Naměříme vzdálenost bodu  $K$  od  $d$ , naneseťme od  $\delta$  na  $p$  do bodu  $N$  a  $\overline{NK}$  je žádaná normála křivky  $k$ , stejně pro křivku  $l$  stanovena v  $l$  normála. Chceme-li v bodě  $3$  sestrojiti normálu, učiníme  $\overline{3\delta}$  rovné vzdálenosti přímky  $r$  od  $d$ ;  $V, R$  jsou žádané paty.

Je-li na příklade dána elipsoidální klenba o lici v ploše  $\varepsilon$  (obr. 4), sestrojíme si kdekoli redukční úhly  ${}^1\varphi$  o vrcholu  ${}^1V$  pro poměr  ${}^1\lambda = \overline{U_1S_1} : \overline{MS_1}$  a  ${}^2\varphi$  o vrcholu  ${}^2V$  pro poměr  ${}^2\lambda = \overline{U_2S_2} : \overline{PS_2}$ , kde  $M$  a  $P$  jsou středy hlavních křivostí řezů  $m$  a  $p$ . Pro bod  $K$  vyšetříme normálu tím, že na  $m_2$  od  $S_2$  do bodu  $2$  naneseťme na  ${}^2\varphi$  redukovanou vzdálenost  $K_2 \rightarrow o_2$  a na  $p_1$  od  $S_1$  do bodu  $1$  na úhlu  ${}^1\varphi$  redukovanou vzdálenost  $K_1 \rightarrow o_1$ .  $1K_1$  je půdorys,  $2K_2$  je nárys požadované normály. Nárys i půdorys lze stanoviti neodvisle; tak byl pro bod  $O$  plochy  $\varepsilon$  sestrojen pouze nárys  $3O_2$  za pomoci redukčního úhlu  ${}^2\varphi$ .

Uvedené konstrukce jsou výhodné zejména tím, že jsou velmi stručné a nezatěžují náskresnu pomocnými čarami vůbec.

## Odhad prosté hodnoty integrálů a kriteria pro konvergenzi nevlastních integrálů.

Jan Mařík, Praha.

Úvod. Mějme reálnou funkci  $f$ , definovanou v intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Systém čísel  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$  ( $n$  je přirozené číslo  $\geq 1$ ), splňující vztah  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , nazveme dělením intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Každému dělení přiřadíme číslo  $\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ . Je-li množina těchto čísel shora ohraničená, řekneme, že funkce  $f$  má v  $\langle a, b \rangle$  konečnou variaci. Supremum té množiny označíme  $V(a, b)$  a nazveme je variací  $f$  v  $\langle a, b \rangle$ . Podobně definujeme  $V(x_1, x_2)$ , kde  $a < x_1 < x_2 < b$ . Bez důkazu uvádím, že platí  $V(a, x_1) + V(x_1, x_2) = V(a, x_2)$ . Je tedy  $V(a, x)$  neklesající funkcí proměnné  $x$ . Dále uvádím bez důkazu, že funkce s konečnou variací v  $\langle a, b \rangle$  má tam integrál Cauchy-Riemannův.

**Věta 1.** Mějme interval  $\langle a, b \rangle$ . V tomto intervalu mějme reálné funkce  $f, g$ ; funkci  $f$  integrovatelnou a funkci  $g$  s kon. variací  $V$ . Pak

existuje  $\xi$ ,  $a \leq \xi \leq b$ , tak, že platí

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq (V + |g(b)|) \cdot \left| \int_a^\xi f(x) dx \right|. \quad (\alpha)$$

Důkaz. Utvořme dělení  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ; označme  $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$  a utvořme součet  $s = \sum_{k=1}^n f(x_k) g(x_k) \Delta_k$ .

Označme dále  $f(x_k) \Delta_k = \alpha_k$ ,  $g(x_k) = \beta_k$ ,  $\sigma_0 = 0$ ,  $\sigma_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i$ . Pak platí

$$\begin{aligned} s &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k = \sum_{k=1}^n (\sigma_k - \sigma_{k-1}) \beta_k = \sum_{k=1}^n \sigma_k \beta_k - \sum_{k=2}^n \sigma_{k-1} \beta_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \sigma_k \beta_k - \sum_{k'=1}^{n-1} \sigma_{k'} \beta_{k'+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + \sigma_n \beta_n. \end{aligned}$$

Existuje index  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , že platí  $|\sigma_j| \geq |\sigma_k|$  pro  $k = 1, 2, \dots, n$ . Pak platí

$$|s| \leq |\sigma_j| \left( \sum_{k=1}^{n-1} |\beta_k - \beta_{k+1}| + |\beta_n| \right). \quad (\beta)$$

Označme ještě  $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$  a podobně definujme  $m_k$ . Pak platí

$$\sum_{k=1}^j m_k \Delta_k \leq \sigma_j \leq \sum_{k=1}^j M_k \Delta_k$$

a také

$$\sum_{k=1}^j m_k \Delta_k \leq \int_a^{x_j} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^j M_k \Delta_k$$

a tedy

$$\left| \sigma_j - \int_a^{x_j} f(x) dx \right| \leq \sum_{k=1}^j (M_k - m_k) \Delta_k \leq \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta_k.$$

Označme  $\sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta_k = \Omega$ . Pak platí  $|\sigma_j| \leq \left| \int_a^{x_j} f(x) dx \right| + \Omega$ .

Protože je integrál a tudíž i jeho prostá hodnota spojitou funkcí horní meze, existuje  $\xi \in \langle a, b \rangle$  tak, že pro všechna  $x \in \langle a, b \rangle$  platí  $\left| \int_a^\xi f(x) dx \right| \geq \left| \int_a^x f(x) dx \right|$ . Je tedy  $|\sigma_j| \leq \left| \int_a^\xi f(x) dx \right| + \Omega$ . Dosazením

do  $(\beta)$  dostáváme (platí totiž také  $\sum_{k=1}^{n-1} |\beta_k - \beta_{k+1}| \leq V$ )

$$\left| \sum_{k=1}^n f(x_k) g(x_k) \Delta_k \right| \leq \left( \left| \int_a^\xi f(x) dx \right| + \Omega \right) \cdot (V + |g(b)|). \quad (\gamma)$$

To platí pro každé dělení; číslo  $\xi$  na dělení nezávisí. Utvořme posloupnost dělení tak, aby každý interval  $m$ -tého dělení měl délku  $\frac{b-a}{m}$ . Nerovnost ( $\gamma$ ) pak platí i pro limitu, čímž je dokázáno ( $\alpha$ ).

**Věta 1a.** *Budte  $a, b$  komplexní čísla. Mějme v komplexní rovině spojitou křivku  $K$  konečné délky o koncových bodech  $a, b$ . Na této křivce budte definovány spojitě komplexní funkce  $f, g$ . Necht  $g$ , zobrazuje  $K$  na křivku délky  $V$ . Pak existuje  $\xi \in K$  tak, že platí ( $\alpha$ ), integrace se ovšem provádí po křivce  $K$ .*

Důkaz přenechávám čtenáři. Délku křivky definujeme ošem jako supremum [výrazu  $\sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})|$  pro všechna dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

**Věta 2.** *Mějme interval  $\langle a, b \rangle$ ; též může být  $b = \infty$ . V tomto intervalu mějme reálné funkce  $f, g$ . Necht pro každé  $c, a < c < b$ , existuje vlastní integrál  $\int_a^c f(x) dx$ . Mějme číslo  $B$  tak, že v každém intervalu  $\langle a, c \rangle$  má  $g$  konečnou variaci  $V(a, c)$  a že platí  $V(a, c) < B$ . Necht existuje vlastní nebo nevlastní integrál  $\int_a^b f(x) dx$ . Pak existuje též vlastní nebo nevlastní integrál  $\int_a^b f(x) g(x) dx$ .*

Důkaz: Platí  $|g(a) - g(c)| \leq V(a, c) < B$ , tedy  $|g(c)| < |g(a)| + B$ .

Zvolme  $\varepsilon > 0$ . Protože existuje  $\int_a^b f(x) dx$ , existuje  $c_0 < b$  tak, že  $c_0 < x_1 < x_2 < b \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{|g(a)| + 2B}$ . Podle věty 1 pak existuje  $\xi, c_0 < x_1 \leq \xi \leq x_2 < b$ , tak, že platí

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) g(x) dx \right| &\leq (V(x_1, x_2) + |g(x_2)|) \cdot \left| \int_{x_1}^{\xi} f(x) dx \right| < \\ &< (B + |g(a)| + B) \cdot \frac{\varepsilon}{|g(a)| + 2B} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Je tedy splněna Bolzano-Cauchyova podmínka pro konvergenci integrálu.

**Věta 3.** *Mějme interval  $\langle a, b \rangle$ ; též může být  $b = \infty$ . V tomto intervalu mějme reálné funkce  $f, g$ . Mějme číslo  $A$  tak, že pro každé  $c, a < c < b$ , existuje vlastní integrál  $\int_a^c f(x) dx$  a platí  $\left| \int_a^c f(x) dx \right| < A$ . Mějme číslo  $B$  tak, že v každém intervalu  $\langle a, c \rangle, a < c < b$ , má  $g$*

konečnou variaci  $V(a, c)$  a platí  $V(a, c) < B$ . Budiž  $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ ). Pak existuje vlastní nebo nevlastní integrál

$$\int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Důkaz. (Výraz  $\lim$  znamená buď  $\lim_{x \rightarrow b^-}$  nebo  $\lim_{x \rightarrow \infty}$ .) Protože je  $V(a, x)$  neklesající a ohraničená funkce  $x$ , existuje  $\lim_{x \rightarrow \infty} V(a, x) = \sup V(a, x)$ ; označíme je  $V$ . Zvolme  $\varepsilon > 0$ . Pak existuje  $c_1 < b$  tak, že  $c_1 < x < b \Rightarrow V - V(a, x) < \frac{\varepsilon}{4A}$ . Protože jest  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ , existuje  $c_2 < b$  tak, že  $c_2 < x < b \Rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4A}$ . Budiž  $c_0 = \max(c_1, c_2)$ . Pak  $c_0 < x_1 < x_2 < b \Rightarrow$  existuje  $\xi$ , že platí  $x_1 \leq \xi \leq x_2$ ,

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) g(x) dx \right| \leq (V(x_1, x_2) + |g(x_2)|) \cdot \left| \int_{x_1}^{\xi} f(x) dx \right|.$$

Platí  $0 \leq V(x_1, x_2) = V(a, x_2) - V(a, x_1) \leq V - V(a, x_1) < \frac{\varepsilon}{4A}$ .

Rovněž platí  $|g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{4A}$ , tedy  $V(x_1, x_2) + |g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2A}$ . Dále

jest  $\left| \int_{x_1}^{\xi} f(x) dx \right| = \left| \int_a^{\xi} f(x) dx - \int_a^{x_1} f(x) dx \right| < 2A$ . Násobením nerov-

ností dostáváme  $\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) g(x) dx \right| < \varepsilon$ . Je tedy opět splněna Bolzano-Cauchyova podmínka pro konvergenci integrálu.

## Dvě eliptické kubatury.

Dr Vladimír Ryšavý, Praha.

Uvádíme dva příklady kubatury těles obsahující integrály eliptických funkcí.

A) Určiti objem tělesa uzavřeného obalovou plochou koulí, jejichž středy leží na elipse  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  a jež jdou počátkem.

Rovnice plochy jest

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2),$$

ve sférických souřadnicích