Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Stanovení jistého mnohonásobného integrálu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 3, 225--230

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122973

Stanovení jistého mnohonásobného integrálu.

Sdílí **M. Lerch** v Brně.

V uplynulém právě ročníku časopisu l'Intermédiaire des Mathématiciens (otázka 3225) předkládá p. H. Laurent k vyšetření integrál

$$H = \int \ldots \int dx_1 \ldots dx_n$$

vzatý nad oborem integračním, jenž definován podmínkami

$$-\frac{1}{2} \leqq x_\nu \leqq \frac{1}{2}, \qquad -\alpha \leqq x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqq \alpha,$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots n),$$

při čemž α je daná kladná konstanta.

Abychom provedli integraci, zaveďme isolační faktor Dirichletův

$$O(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

jenž jest roven 1 pro $|\Sigma x_\nu| < \alpha$, a roven 0 pro $|\Sigma x_\nu| > \alpha$.

Pak bude lze předložený integrál psáti

$$H = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_{n-1} \ldots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_1 \; O(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Jak sám Dirichlet několikráte poznamenal, máme při kladném a a libovolném b

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin a t \cos b t}{t} dt = \frac{sgn(a+b) + sgn\,(a-b)}{2} \tag{1}$$

(kde $sgn\,.\,z$ značí znamení veličiny z), vzorec plynoucí bezprostředně ze známé rovnice

$$\int_0^\infty \frac{\sin m x}{x} dx = \frac{\pi}{2}\, sgn\,.\,m.$$

Pravá strana rovnice (1) je rovna 1 pro $|b| < a$, a rovna 0 pro $|b| > a$, a proto bude lze vzíti náš isolační faktor ve tvaru

$$O(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha t}{t} \cos (t \sum_1^n x_\nu) \,.\, dt. \qquad (2)$$

Tím způsobem se objeví rovnice

$$\frac{\pi}{2} H = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha t}{t} dt \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos t \, \Sigma x_\nu \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n. \qquad (3)$$

Poněvadž

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos t (u + x_n) \, dx_n = \frac{\sin (t u + \frac{t}{2}) - \sin (t u - \frac{t}{2})}{t}$$

$$= \cos t u \,.\, \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}},$$

vyjde postupným užíváním tohoto vzorce

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos t (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n = \left(\frac{2}{t} \sin \frac{t}{2}\right)^n,$$

a rovnice (3) obdrží tento jednoduchý tvar

$$\frac{\pi}{2} H = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha t}{t} \left(\frac{2}{t} \sin \frac{t}{2}\right)^n dt,$$

který přeměníme vložením $2t$ za t na

$$\frac{\pi}{2} H = \int_0^\infty \frac{\sin 2\alpha t \,.\, \sin^n t}{t^{n+1}} dt. \qquad (4)$$

Integrál tento lze považovati za zvláštní hodnotu analytické funkce proměnné s

$$F(s) = \int_0^\infty \sin 2\alpha t \,.\, \sin^n t \,.\, t^{s-1} \, dt, \qquad (5)$$

a sice pro $s = -n$; tato funkce jest analyticky pravidelna, pokud reálná část proměnné s převyšuje hodnotu $-n-1$, zůstávajíc menší jednotky. Pouze případ $\alpha = \frac{1}{2}$, n liché, by mohl činiti výjimku, ana by tu existence integrálu vyžadovala reálnou část s zápornou; můžeme však případ $\alpha = \frac{1}{2}$ vyloučiti a předpokládati $\alpha \gtrless \frac{1}{2}$.

Hodnotu funkce $F(s)$ stačí určiti za předpokladu, že reálná část veličiny s náleží intervallu $(0 \ldots 1)$, neboť jakožto funkce analytická bude tím již dána v celém oboru existenčním vůči proměnné s. Za řečeného předpokladu budou pak existovati integrály, v něž se integrál (5) rozloží, užijeme-li identity

$$(2i \sin t)^n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} e^{(n-2\nu)it};$$

vyjde pak

$$(2i)^n F(s) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \int_0^\infty \sin 2\alpha t \, e^{(n-2\nu)it} t^{s-1} \, dt.$$

Zde ještě užijeme rozkladu

$$2i \sin 2\alpha t = \sum_{\varepsilon} \varepsilon e^{2\varepsilon\alpha it}, \quad (\varepsilon = 1, -1)$$

načež bude

$$(2i)^{n+1} F(s) = \sum_{\nu, \varepsilon} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \varepsilon \int_0^\infty e^{(n-2\nu+2\varepsilon\alpha)it} t^{s-1} \, dt.$$

Dle známého vzorce Eulerova platného pro reálná a

$$\int_0^\infty e^{ait} t^{s-1} \, dt = \frac{\Gamma(s)}{|a|^s} e^{\frac{s\pi i}{2} \operatorname{sgn.} a}$$

vyčíslí se jednotlivé integrály našeho součtu, i objeví se tak výsledek

$$(2i)^{n+1} F(s) = \Gamma(s) \Phi(s), \tag{6}$$

kde užito označení

$$\Phi(s) = \sum_{\nu, \varepsilon} (-1)^\nu \varepsilon \binom{n}{\nu} \frac{e^{\frac{s\pi i}{2} \operatorname{sgn.}(n-2\nu+2\varepsilon\alpha)}}{|n-2\nu+2\varepsilon\alpha|^s}. \tag{6a}$$

Nyní bude nám vyšetřiti hodnotu funkce $\Gamma(s)\,\Phi(s)$ pro $s = -n$, neboť rovnicemi (6) a (6^a) jest analytická funkce $F(s)$ definována jako velmi jednoduchý analytický útvar existující v celé rovině komplexní proměnné s.

Aby součin $\Gamma(s)\,\Phi(s)$ byl pro $s = -n$ konečný, je nutno i stačí, aby celistvá funkce $\Phi(s)$ zmizela pro $s = -n$. Poněvadž dále, jak známo,

$$\Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n\,!\,(s+n)} + \mathfrak{P}(s+n),$$

kde $\mathfrak{P}(s+n)$ je řada Taylorovská konvergentní pro $|s+n| < 1$, bude

$$\lim_{s=-n} \left\{ \Gamma(s)\,\Phi(s) \right\} = \lim_{s=-n} \frac{(-1)^n\,\Phi(s)}{n\,!\,(s+n)} = \frac{(-1)^n}{n\,!}\,\Phi'(-n),$$

a tedy dle (6)

$$(2i)^{n+1} F(-n) = \frac{(-1)^n}{n\,!}\,\Phi'(-n). \tag{7}$$

Avšak přímým derivováním výrazu (6^a) plyne pro $s = -n$

$$\Phi'(-n) = \frac{\pi i}{2} \sum_{\nu,\,\varepsilon} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \varepsilon\, sgn\,(n - 2\nu$$

$$+ 2\varepsilon\alpha)\, e^{-\frac{n\pi i}{2} sgn\,.\,(n-2\nu+2\varepsilon\alpha)}\, |\,(n - 2\nu + 2\varepsilon\alpha\,|^n$$

$$- \sum_{\nu,\,\varepsilon} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \varepsilon\, e^{-\frac{n\pi i}{2} sgn\,.\,(n-2\nu+2\varepsilon\alpha)}\, |\, n - 2\nu + 2\varepsilon\alpha\,|^n$$

$$.\,\log\,|\, n - 2\nu + 2\varepsilon\alpha\,|. \tag{8}$$

V druhé části (logarithmické) zruší se členy $\nu = \mu$, $\varepsilon = 1$ a $\nu = n - \mu$, $\varepsilon = -1$ navzájem, kdežto v první části členy ty se sobě rovnají, tak že v ní obdržíme všecky členy, klademe-li $\varepsilon = 1$, $\nu = 1, 2, \ldots n$, násobíce výsledek dvěma; při tom jest si vzpomenouti samozřejmé identity

$$sgn.\,u\;.\;e^{-\frac{n\pi i}{2} sgn\,.\,u} = i^{-n},$$

pro n liché.

V případě lichého n podá nám tedy vzorec

$$H = \frac{2}{\pi}\,F(-n) = \frac{(-1)^n}{n\,!\,(2i)^{n+1}}\,\Phi'(-n)\,.\,\frac{2}{\pi}$$

výsledek

$$H = \frac{1}{n!\,2^n} \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} |\, n - 2\mu + 2\alpha\,|^n.$$

Je-li však n sudé, bude pro všecka ν

$$e^{-\frac{n\pi i}{2} sgn.(n - 2\nu + 2\alpha)} = i^{-n}$$

a objeví se výsledek

$$H = \frac{1}{n!\,2^n} \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (n - 2\mu + 2\alpha)^n \, sgn\,(n - 2\mu + 2\alpha).$$

Oba případy jsou zahrnuty vzorcem

$$H = \frac{1}{n!\,2^n} \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (n - 2\mu + 2\alpha)^n \, sgn.(n - 2\mu + 2\alpha), \qquad (9)$$

jenž řeší *Laurentův* problém s veškerou obecností. Vyloučený případ $\alpha = \frac{1}{2}$ nečiní tu žádné věcné výjimky, jak přechod mezný bezprostředně ukáže.

Integrál H lze interpretovati jako n-dimensionálný obsah útvaru krychlového o n rozměrech, jehož vrcholy mají souřadnice $\pm \frac{1}{2}$, a který jest rozdělen lineárnými útvary

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \pm \alpha$$

ve tři části, z nichž prostřední jest právě obsahu H.

Pro $\alpha \geqq \frac{n}{2}$ probíhají oba lineárné útvary mimo n-dimensionálnou krychli a H musí býti rovno 1. Skutečně jest pak $n - 2\mu + 2\alpha \geqq 2(n - \mu) > 0$, tedy

$$H = \frac{1}{n!\,2^n} \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (n - 2\mu + 2\alpha)^n$$

součet na pravé straně lze dle známé identity

$$\Delta^n u_0 = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{\nu} u_{n-\nu}$$

považovati za prvý člen n-té řady rozdílové příslušné k řadě základní

$$u_\mu = (2\mu - n + 2\alpha)^n, \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots);$$

avšak zde

$$\Delta^n u_0 = 2^n n!,$$

tedy skutečně $H = 1$.

Funkce $sgn(n - 2\mu + 2\alpha)$ má vůči proměnné α přetržku $\alpha = \mu - \frac{n}{2}$, tedy výraz (9) mění svůj analytický zákon na bodech

$$\alpha_0 = \frac{n}{2}, \; \alpha_1 = \frac{n}{2} - 1, \; \alpha_2 = \frac{n}{2} - 2, \ldots ;$$

mezi po sobě jdoucími α jest pak H táž celistvá racionálná funkce parametru α.

Poznamenejme ještě, že pro $\frac{n}{2} - 1 < \alpha < \frac{n}{2}$ vyjde

$$H = 1 - \frac{2}{n!}\left(\frac{n}{2} - \alpha\right)^n.$$

O jisté ploše bikvadratické, jež souvisí s theorií komplexu os rotačních ploch kuželových jdoucích třemi danými body.

Napsal **Lad. Seifert**, prof. v Plzni.

O komplexu, jejž tvoří osy rotačních ploch kuželových jdoucích třemi danými body, pojednává obšírně J. B. Eck ve své dissertaci: „Über die Verteilung der Axen der Rotationsflächen 2. Grades, welche durch gegebene Punkte gehen“ [1]. V prvé části své práce rozbírá komplex rotačních os ploch druhého st. jdoucích čtyřmi body danými opíraje se o jistou větu Laguerrem dokázanou [2], k tomu připojuje dále pojednání o komplexu os rotačních ploch válcových jdoucích dvěma a rotačních ploch kuželových jdoucích třemi body vedle řešení ještě jiných s tím souvisících otázek. Vyšetření posledního komplexu působí z důvodů na snadě ležících nejvíce obtíží, ale dá se provésti snadno užitím zajímavé plochy, jejíž vytvoření v následujícím podávám. Odvození vlastností řečeného komplexu z nejdůležitějších vlastností této plochy jest ryze synthetické a podává přehledný obraz o jakosti zde se vyskytujících geometrických míst i jejich

---

[1]) Inaugural-Dissertation, Bonn. 1890.

[2]) »Sur la courbe envelloppée par les axes des coniques qui passent par quatres points donnés et sur les axes de révolution du second ordre etc «, Nouvelles Annales de Math., 2. Serie, Bd. 18.