Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Pleskot

O jisté vlastnosti kuželoseček

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 4, 494--497

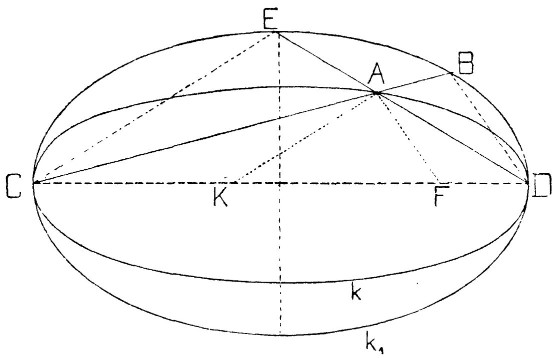
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123044`

O jisté vlastnosti kuželoseček.

Dr. **Ant. Pleskot**, professor v Plzni.

V předchozím ročníku tohoto časopisu v článku „Parametrická vlastnost kuželoseček" a v letošním druhém čísle téhož časopisu poukázal p. vládní rada Jeřábek na tuto vlastnost kuželoseček: Spojíme-li koncové body kuželosečky na ose ohniskové s libovolným bodem kuželosečky a vedeme-li bodem tím ke spojnicím kolmice, tu vymezují kolmice na ose úsečku rovnající se dvojnásobnému parametru.

Zároveň připojena byla otázka, zdali věta ta již někde uvedena byla. Poněvadž na poznámku tuto ještě nebylo odpověděno, mám za to, že nebyla o větě hořejší nikde učiněna zmínka, a z té příčiny chci zde podati větu, jejímž zvláštním případem jest věta p. Jeřábka.



Podáme nejprve užší zevšeobecnění věty, již pak centrální kollineací rozšíříme: Nechť jsou dány dvě kuželosečky K a K_1, které v koncových bodech C a D jedné reálné osy se dotýkají. V obrazci našem naznačeny jsou dvě ellipsy.

Vyvolme na jedné z nich, na př. na K, libovolný bod A a spojme ho s koncovými body C a D společné osy. Přímka AC protne kuželosečku K_1 v bodě B a spojnice AD v bodě E. Vedeme-li nyní bodem A rovnoběžky ku BD a CE, pak tyto protínají společnou osu v bodech F a K a odlehlost těchto bodů t. j. délka FK jest veličina konstantní, nezávislá na poloze bodu A na kuželosečce.

Věta, kterou p. Jeřábek uvedl, jest speciálním případem věty této; volíme-li totiž za kuželosečku K_1 kružnici, pak přímky BD a CE jsou kolmy ku CA a DA.

Důkaz jest následující:

Budiž rovnice kuželosečky K:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

při čemž ovšem může býti b^2 záporné a křivka značí hyperbolu.

Rovnice kuželosečky K_1 pak zní:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

kdež b_1^2 i záporné číslo značiti může.

Přímky CB a DB jsou rovnoběžny k dvěma sdruženým průměrům kuželosečky K_1, podobně CE a DE.

Označíme-li úhel, který tvoří paprsek CB s osou X, α, pak úhel α_1, jež tvoří paprsek BD s touže osou, jest dán rovnicí:

$$tg\, \alpha_1 = -\frac{b_1^2}{a^2\, tg\, \alpha}.$$

Rovnice přímky AF rovnoběžné ku BD zní:

$$y - y_1 = -\frac{b_1^2}{a^2\, tg\, \alpha}(x - x_1),$$

značí-li (x_1, y_1) souřadnice bodu A.

Rovnice přímky AK rovnoběžné ku EC jest:

$$y - y_1 = -\frac{b_1^2}{a^2\, tg\, \beta}(x - x_1),$$

je-li β úhel, který tvoří paprsek DA s osou X.

Úsečky x_F a x_K průsečíků s osou X obou předchozích přímek jsou dány výrazy:

$$x_F = \frac{y_1 a^2 tg\,\alpha}{b_1^2} + x_1,$$

$$x_K = \frac{y_1 a^2 tg\,\beta}{b_1^2} + x_1.$$

Délka KF má tedy hodnotu:

$$KF = \frac{y_1 a^2}{b_1^2}(tg\,\alpha - tg\,\beta).$$

Poněvadž

$$tg\,\alpha = \frac{y_1}{x_1 + a}, \qquad tg\,\beta = \frac{y_1}{x_1 - a},$$

jest

$$KF = \frac{y_1 a^2}{b_1^2}\left(\frac{y_1}{x_1 + a} - \frac{y_1}{x_1 - a}\right) = -\frac{2\,a^3 y_1^2}{b_1^2\left(x_1^2 - a^2\right)}.$$

Z rovnice křivky K plyne však:

$$\frac{a^2 y_1^2}{a^2 - x_1^2} = b^2,$$

a proto

$$KF = \frac{2ab^2}{b_1^2},$$

čímž dokázáno, že délka KF jest pro kterýkoli bod A kuželosečky konstantní. Volíme-li $b_1^2 = a^2$, t. j. kuželosečka K_1 jest kružnicí, čili vedeme-li AF a AK kolmo ku CA a DA, pak

$$KF = \frac{2b^2}{a}.$$

Větu, kterou jsme zde uvedli, možno dále rozšířiti takto: Jsou dány dvě kuželosečky K a K_1, jež se dotýkají v bodech C a D. Vyvolme na prvé libovolný bod A a spojme jej s body C a D; přímka CA protne kuželosečku K_1 v bodě M a přímka DA v bodě N. Veďme dále průsečíkem společných tečen rovnoběžku t se spojnicí CD, čili poláru středu úsečky CD; tuto poláru protne přímka CN v bodě N_1 a přímka DM v bodě M_1, a tu platí: přímky AN_1 a AM_1 vytínají na přímce CD konstantní délku N_2M_2.

Věta tato plyne přímo z předchozí na základě kollineace. Volíme-li za osu kollineace přímku CD a přiřadíme-li tečnám v bodech C a D tečny, jež stojí kolmo na osu CD, pak kuželosečky K, K_1 přejdou v kuželosečky K', K'_1, pro které přímka CD jest osou; bod A přejde v A' a přímce t odpovídá nekonečně vzdálená přímka v soustavě kuželoseček K' a K'_1. Přímce AN_2 odpovídá přímka $A'N'_2$, rovnoběžná s přímkou CN', a přímce AM_2 rovnoběžka s přímkou $M'D$, jdoucí bodem A', značí-li N' a M' body, v něž kollineací přešly body N a M; poněvadž body na ose kollineační sobě samy odpovídají, t. j.

$$M_2 \equiv M'_2,$$
$$N_2 \equiv N'_2,$$

a jelikož délka $M'_2N'_2$ dle dřívějšího jest konstantní, jest i M_2N_2 konstantní.

Poznámka k theorii kuželoseček vepsaných do rovnoběžníka.

Napsal Josef **Klíma**, assistent techniky.

V roč. XLI. tohoto časopisu na str. 97. a násl. a str. 639. a násl. odvozuje pan prof. *R. Hruša* v článku: „*Poznámky k theorii kuželoseček*“ některé zajímavé vztahy pro kuželosečky vepsané obdélníku neb rovnoběžníku cestou analytické geometrie. Mimo jiné dokazuje též větu, že ohniska kuželoseček vepsaných do rovnoběžníku vyplňují jistou rovnoosou hyperbolu, jež v případě, že lze rovnoběžníku tomu kružnici vepsati, rozpadá se ve dvě kolmé přímky. V následujícím chci týž výsledek odvoditi jednoduchou prostorovou interpretací.

Buďtež dány čtyři tečny $T \| {}^1T$ a $T' \| {}^1T'$ kuželosečky, takže určují rovnoběžník $abcd$ této opsaný. Kuželoseček, jež dotýkají se těchto, je ∞^1 a tvoří t. zv. *řadu.* Všechny tyto mají společný střed s, průsečík to úhlopříček $\overline{ac}$, $\overline{bd}$ a společný pár sdružených průměrů (ale jen co do směrů) $\Delta \equiv \overline{ac}$, $\Delta' \equiv \overline{bd}$,