

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Hugo Steinhaus

Różne formy prawa wielkich liczb

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 2, 114--117

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123056>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1949

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

RÓŻNE FORMY PRAWA WIELKICH LICZB.*)

HUGO STEINHAUS, Wrocław.

Niech funkcja $x(t)$ będzie określona w przedziale $(0,1)$ i mierzalna. Dystrybuantę $X(\alpha)$ funkcji $x(t)$ określamy przez: $X(\alpha) = |E\{x(t) < \alpha\}|$, dystrybuantę $H(\alpha, \beta)$ pary $x(t), y(t)$ przez $H(\alpha, \beta) = |E\{x(t) < \alpha, y(t) < \beta\}|$. Niezależność pary x, y wyraża się przez identyczność $H(\alpha, \beta) = X(\alpha) \cdot Y(\beta)$. Analogicznie określa się niezależność trójek, czwórek, ..., n -ek. Niezależność „en bloc” oznacza niezależność n -ek dla wszystkich n naraz.

I. Twierdzenie Bernoulli'ego brzmi:

Jeżeli $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ są parami niezależne, posiadają tę samą dystrybuantę, a mają pierwszy i drugi moment, to

$$\lim \text{ass}_n(t)/n = \text{const}; \quad s_n \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1)$$

Do dowodu można użyć twierdzenia Banacha, że średnia funkcji unormowanych i ortogonalnych dąży prawie wszędzie do zera; taki dowód można zastosować jednak także i bez założenia istnienia drugiego momentu; można mianowicie zastąpić funkcje $x_i(t)$ przez ograniczone plus reszta, o której można pokazać, że jej średnia ma całkę modułu dowolnie małą. Natomiast zachowanie założenia drugiego momentu pozwala osłabić założenie niezależności i zastąpić je założeniem zerowej kowariancji par x_i, x_k . Niewiadomo, czy obydwie uszczuplenia założeń jeszcze dają (1), czyli t. zw. słabe prawo wielkich liczb.

II. Mocne prawo wielkich liczb wyraża się przez

$$\lim s_n(t)/n = \text{const} \text{ prawie wszędzie.} \quad (2)$$

Udowodnił je Cantelli w r. 1916; przy założeniu niezależności parami i dwóch momentów (oczywiście wspólnej dystrybuanty) można oprzeć się i tu na tw. Banacha (Bull. Ac. Pol. 1919). Kołmogorow udowodnił je przy założeniu tylko pierwszego momentu, jednak dla niezależności „en bloc”. Czy tu można niezależność „en bloc” osłabić, nie wiadomo.

Tak jak dystrybuantę funkcji, można określić dystrybuantę ciągu numerycznego: jest to frekwencja wyrazów mniejszych od α . Analogia daje także pojęcie niezależności dwóch ciągów. Możemy sformułować takie prawo wielkich liczb:

III. Gdy $x_i(t)$ są parami niezależne i posiadają tę samą dystrybuantę $F(\alpha)$, to ciąg $\{x_i(t)\}$ ma dla prawie wszystkich t dystrybuantę $F(\alpha)$. Dowód opiera się na prawie Cantelli'ego; nie zakłada się istnienia momentów.

*) Pełny text będzie opublikowan w Colloquium Mathematicum.

Z ostatniego prawa wynika rozwiązanie paradoksu petersburskiego: gdy płaci się graczowi 2^{n-1} , skoro orzeł pokaże się dopiero w n -tym rzucie monetą, to gracz musi płacić w każdej grze inną opłatę; opłaty

1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 8, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 16, ...

mają tę samą dystrybuantę, co obietnica $x(t)$, więc według prawa III., gra może być uważana za sprawiedliwą.

Przy założeniach III ciągi $\{x_i(s)\}$ $\{x_i(t)\}$ są od siebie niezależne dla prawie każdego punktu (s, t) kwadratu jednostkowego.

IV. Z twierdzenia ergodycznego można otrzymać taką formę prawa wielkich liczb: jeżeli funkcje $x_i(t)$ są równouprawnione, t. zn. jeżeli dystrybuanta każdej n -ki jest równa dystrybuancie n -ki powstałej przez przesunięcie wskaźników o jeden, to

$$\lim s_n(t)/n \text{ istnieje prawie wszędzie;} \quad (3)$$

ta forma prawa wielkich liczb występuje już u Chińczyna w r. 1937, a później u Dooba. Trzeba zaznaczyć, że niniejszy referat nie rozstrzyga autorstwa poszczególnych twierdzeń; jest to zadanie nielatte wobec zupełności bibliograficznej prac z rachunku prawdopodobieństwa.

Nazywamy *przypadkowym* ciąg $\{a_n\}$, którego dystrybuanta ma co najwyżej trzy różne wartości i który jest niezależny od swoich przesunięć $\{a_{n+k}\}$. Gdy $x_i(t)$ są czwórkami niezależne i mają wspólną nietrywialną dystrybuantę, to ciąg $\{x_i(t)\}$ jest dla prawie każdego t przypadkowy.

*

Summary. — Streszczenie.

Various forms of the law of large numbers.*)

-HUGO STEINHAUS, Wrocław.

Let the function $x(t)$ be defined and measurable in the interval $(0,1)$. We define the distribution function $X(\alpha)$ of the function $x(t)$ by the expression $X(\alpha) = |E\{x(t) < \alpha\}|$, and the distribution function $H(\alpha, \beta)$ of the bivariate population $x(t), y(t)$ by the expression $H(\alpha, \beta) = |E\{x(t) < \alpha, y(t) < \beta\}|$. The independence of the two variables x, y is expressed by the identity $H(\alpha, \beta) = X(\alpha) \cdot Y(\beta)$. In a similar way we define the independence of systems of two, three or more variables. „En bloc“ independence means independence of each system of n variables for all n .

I. Bernoulli's theorem states:

If the functions $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ are independent by pairs, if they have the same distribution function, and if each of them possesses first and second moments, then

*) To appear in full in Colloquium Mathematicum.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t)/n = \text{const}, \text{ where } s_n = \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1)$$

For the proof it is possible to use Banach's theorem stating that the mean value of normalized and orthogonal functions converges almost everywhere to zero. This proof can be used even without the assumption of the existence of the second moment; in particular it is possible to replace the functions $x_i(t)$ by limited functions plus a remainder concerning which it can be shown that its absolute mean value has an integral arbitrarily small. On the other hand, if we assume the existence of the second moment we may weaken the assumption of independence and replace it by the assumption of zero covariance of the pairs x_i, x_k . It is not known whether the simultaneous weakening of both assumptions still gives relation (1), i. e. the so-called weak law of large numbers.

II. The strong law of large numbers is expressed by the relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t)/n = \text{const almost everywhere.} \quad (2)$$

Cantelli proved this in 1916; on the assumption of the independence by pairs and of the existence of both moments (and naturally also of a common distribution function), we can here again make use of Banach's theorem (Bull. Ac. Pol. 1919). Kolmogorov proved this theorem assuming the existence of only the first moment, and of course on the assumption of „en bloc“ independence. It is not known whether it is here possible to weaken the „en bloc“ independence.

Just as it is possible to define the distribution function of a function, so we can also define the distribution function of a sequence of numbers: it is the frequency of the members of the sequence smaller than α . In the same way we can define the concept of independence of two sequences. The law of large numbers can then be formulated thus:

III. If the functions $x_i(t)$ are independent by pairs, and if they have the same distribution function $F(\alpha)$, then the sequence $\{x_i(t)\}$ has the distribution function $F(\alpha)$ for almost all t . The proof is based on Cantelli's law; the existence of moments is not assumed.

From this law follows the explanation of the Petersburg paradox: if a player wins 2^{n-1} money units provided that the coin does not fall head up until the n th throw, then before each throw he ought to wager the sums

$$1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 8, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 16, \dots$$

which have the same distribution function as the variable $x(t)$; hence, according to law III, the game can be regarded as fair. On the assumptions made in law III, the sequences $\{x_i(s)\}$ and $\{x_i(t)\}$ are independent of each other for almost all points (s, t) of the unit square.

IV. The following form of the law of large numbers can be deduced from the ergodic theorem: If the functions $x_i(t)$ are equivalent, i. e. if

the distribution function of each system of n variables is equal to the distribution function of the n -variable system obtained by altering the subscripts by one, then

$$\lim s_n(t)/n \text{ exists almost everywhere.} \quad (3)$$

This form of the law of large numbers was expressed by Khintchine in 1937 and later by Doob. It should be noted that this paper does not deal with the authorship of the individual theorems. This would be a difficult task indeed due to the incompleteness of bibliographical reports on research in the theory of probability.

The sequence $\{a_n\}$ is said to be random if its distribution function assumes at least three different values, and if the sequence is independent of the alteration $\{a_{n+k}\}$. If $x_i(t)$ are independent by sets of four, and if they have a common non-trivial distribution function, then the sequence $\{x_i(t)\}$ is random for almost all t .

Z ZAGADNIEŃ WSPÓŁCZESNEJ GEOMETRII RÓŻNICZKOWEJ.

WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI, Wrocław.

Zanim przystąpię do właściwego tematu, muszę uprzedzić, że w referacie swym nie mogę omówić wszystkich współczesnych kierunków badań geometrycznych, pominąć muszę np. tak ważną dziedzinę jak integralna geometria różniczkowa. Ograniczam się do tych kierunków badań, które pozostają w związku z moimi osobistymi zainteresowaniami, a więc przede wszystkim do zagadnień związanych z realizacją erlangeńskiego programu KLEINA.

Wiadomo, iż w myśl tego programu zadanie geometrii można sformułować w następujący sposób: mając daną pewną przestrzeń P i operującą w niej grupę przekształceń G — oczywiście grupę w sensie LIE-GO, — skonstruować pełny układ niezmienników względem grupy G utworów zawartych w przestrzeni P , jak krzywe, powierzchnie itp. Tak sformułowany program pozwolił nie tylko usystematyzować i sklasyfikować rezultaty badań geometrycznych ubiegłych czasów, ale stał się zarazem wytyczną dla nowych poszukiwań. Ażeby dać pojęcie o płodności idei KLEINA, wystarczy przytoczyć takie nowsze gałęzie geometrii jak afiniczna geometria różniczkowa niemieckich geometrów z W. BLASCHKE na czele, jak geometria grupy MÖBIUSA, a przede wszystkim różniczkowa geometria rzutowa, dzieło FUBINIEGO i ČECHA. Wprawdzie niektóre niezmienniki różniczkowe krzywych względem grupy rzutowej były znane od wielu lat, skonstruowanie jednolitej i zwartej teorii było jednak wyłączną zasługą tych dwóch geometrów, którzy stworzyli w ten sposób nową, do dzisiejszego dnia żywotną gałąź geometrii. Niektóre