PROBLEMY TEORII FUNKCJI ANALITYCZNYCH W NAJNOWSZYCH PRACACH.

FRANCISZEK LEJA, Kraków.

Mam podać przegląd najnowszych prac z zakresu funkcji analitycznych i problemów rozważanych w tych pracach. Przegląd ten będzie dotyczył wyników otrzymanych w ciągu okresu jednorocznego — w przybliżeniu w ciągu roku 1948. Będę przy tym korzystał z czasopisma *Mathematical Reviews* wydawanego przez Amerykańskie Towarzystwo Matematyczne. Do okresu sprawozdawczego zaliczam prace referowane w tym czasopiśmie w ciągu roku 1948, niektóre więc z prac, o których będzie mowa, ukazały się nieco wcześniej.

W okresie sprawozdawczym ogłoszono drukiem w czasopismach matematycznych świata około 220 prac i rozpraw poświęconych funkcjom analitycznym. Problemy traktowane w tych pracach są różnorodne i należą do wszystkich dziedzin teorii fukcji analitycznych. Dla lepszej orientacji rozdzielę prace na cztery działy (obok podana ilość prac przypadających na dany dział).

I Funkcje dowolne 65, II Funkcje ograniczone 30, III Odwzorowania wierne i funkcje jedno-i wielolistne 55, IV Interpolacja i aproksymacja 70.

Podkreślam, że jest to podział tylko orientacyjny i że liczby w nim podane można by zmieniać w pewnych granicach, bo ta sama praca daje się często zaliczyć do kilku działów jednocześnie. Nie mniej jednak rzuca się w oczy duża ilość prac poświęconych zagadnieniom aproksymacji i zagadnieniom odwzorowań poprzez funkcje analityczne.

Przejdę teraz do omówienia prac należących do poszczególnych działów.

I. *Funkcje dowolne*. Do działu tego zaliczyłem prace poświęcone uogólnieniom funkcji analitycznych, własnościom szeregów potęgowych jednej i wielu zmiennych, badaniom nad przedłużalnością analityczną, nad funkcjami całkowitymi itp.

Wśród otrzymanych wyników przeważają uogólnienia twierdzeń i własności znanych. Czas nie pozwala mi na omówienie wszystkich wyników, ograniczę się więc do podania kilku przykładów.

1° W kilku pracach badano tzw. funkcje *polowo monogeniczne*. Można je określić jako funkcje postaci

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

spełniające w danym obszarze D warunek $A(Af) = 0$, gdzie A oznacza operator

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}.$$

Szereg własności tych funkcji podali A. KRISZTEN i A. BICADZE. W szczególności A. KRISZTEN znalazł dla nich pewien wzór całkowy, analogiczny do wzoru całkowego Cauchy'ego. A. BICADZE podał nowy dowód twierdzenia CIORANESCU, że klasa funkcji polowo monogenicznych pokrywa się z klasą funkcyj postaci

$$f(z) = g(z) + \bar{z} \cdot h(z),$$

gdzie $g(z)$ i $h(z)$ są funkcjami analitycznymi w danym obszarze D, a $\bar{z}$ oznacza jak zwykle $x - iy$.

Zauważmy, że funkcja $f(z) = u + iv$ spełniająca w obszarze D warunek $Af = 0$ jest funkcją analityczną w zwykłym sensie.

G. POŁOŻIJ nazwał funkcję $f(z) = u + iv$ funkcją *p-analityczną* w obszarze D, jeżeli zamiast równań Cauchy-Riemanna spełnia związki

$$p\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad p\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

gdzie $p = p(x, y)$ jest z góry daną funkcją dodatnią klasy C^2 w obszarze D. Autor dowiódł między innymi, że funkcje te określają przekształcenia wewnętrzne w sensie Stoiłowa i że istnieje dla nich pewne twierdzenie całkowe analogiczne to twierdzenia całkowego Cauchy'ego dla funkcji analitycznych. — Funkcje te z innego stanowiska badał również S. BERGMAN.

2^0 Szereg prac poświęcono badaniom szeregów potęgowych. Np. N. ŁUSIN uogólnił następujące twierdzenie Fejéra:

Jeżeli szereg $f(z) = \Sigma a_n z^n$ jest zbieżny w kole $|z| < 1$ i $\Sigma n|a_n|^2 < \infty$, to w każdym punkcie $z = e^{i\Theta}$ okręgu $|z| = 1$, w którym istnieje granica radialna

$$\lim_{r\to 1-} f(re^{i\Theta}) \tag{1}$$

szereg ten jest zbieżny, przy czym zbieżność jest jednostajna na każdym łuku okręgu $|z| = 1$, na którym zbieżność (1) jest jednostajna.

Warunek $\Sigma n|a_n|^2 < \infty$ orzeka, że powierzchnia Riemanna, na jaką funkcja $w = f(z)$ odwzorowuje koło $|z| < 1$, jest skończona. ŁUSIN wykazał, że własność szeregu $f(z) = \Sigma a_n z^n$ wypowiedziana w twierdzeniu Fejéra jest lokalna, tzn. gdy funkcja $f(z)$ odwzorowuje wycinek $A < \arg z < B$ koła $|z| < 1$ na powierzchnię Riemanna o polu skończonym, wówczas twierdzenie Fejéra zachodzi na odnośnym łuku.

P. ERDÖS i H. FRIED badali we wspólnej pracy związek między lukami szeregu postaci

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

o kole zbieżności $|z| < 1$ i zerami sum cząstkowych $s_n(z)$ tego szeregu i podali nowy dowód twierdzenia Bourione, że dany szereg posiada luki w sensie Ostrowskiego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $r > 1$ taka, że

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{A(n, r)}{n} < 1,$$

gdzie $A(n, r)$ jest ilością zer sumy $s_n(z)$ w kole $|z| < r$.

Interesujące twierdzenia o szeregach łukowych podali Sh. AGMON i S. YA. ALPER. Pierwszy uogólnił znacznie twierdzenie Fabry'ego o nieprzedłużalności poza koło zbieżności szeregów postaci

$$\sum_0^\infty a_n z^{\lambda_n}, \quad \text{gdzie} \frac{\lambda_n}{n} \to \infty,$$

drugi rozszerzył znane twierdzenia Hadamarda-Ostrowskiego o nadzbieżności względnie nieprzedłużalności szeregów potęgowych łukowych $\Sigma a_n z^n$ na szeregi wielomianów postaci

$$\sum_0^\infty a_n \cdot p_n(z), \tag{2}$$

gdzie $p_n(z)$ jest dowolnym wielomianem stopnia n, dla $n = 0, 1, \ldots$, a $\{a_n\}$ jest ciągiem stałych posiadającym odpowiednio dobrane luki.

3^0 Przedmiotem kilku prac były szeregi potęgowe wielokrotne. V. G. CZELIDZE rozszerzył twierdzenie Abela o ciągłości sumy szeregu $f(z) = \Sigma a_n z^n$ na szeregi postaci

$$F(x, y) = \sum_{\mu,\nu=0}^\infty a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu. \tag{3}$$

P. LELONG wykazał, że jeżeli współczynniki szeregu (3), zbieżnego w obszarze $D\{|x| < 1,\ |y| < 1\}$, są całkowite i jego suma $F(x, y)$ jest funkcją regularną w pewnym punkcie brzegowym x_0, y_0 obszaru D, to $F(x, y)$ jest funkcją wymierną, gdy $|x_0| = 1$ i $|y_0| = 1$, natomiast może być funkcją przestępną, gdy punkt x_0, y_0 jest wprawdzie punktem brzegowym obszaru D, lecz nie leży na rozmaitości $\{|x| = 1,\ |y| = 1\}$.

W jednej z prac[1]) wyjaśnił F. LEJA problem obszaru zbieżności szeregów Taylora funkcyj dwu zmiennych $f(x, y)$. Szereg taki jest szeregiem wielomianów jednorodnych postaci

$$\sum_{n=0}^\infty (a_{n,0}\, x^n + a_{n-1,1}\, x^{n-1} y + \ldots + a_{0,n}\, y^n), \tag{4}$$

gdzie

$$a_{0,0} = f(0, 0), \quad a_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu!\nu!} \left(\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}.$$

[1]) Praca ta była referowana w *Mathematical Reviews* w r. 1948, lecz ukazała się znacznie wcześniej.

Załóżmy, że szereg (4) jest zbieżny (lub przynajmniej ograniczony) w pewnym zbiorze punktów E w przestrzeni dwu zmiennych zespolonych x i y. Powstają pytania: jaki musi być zbiór E, by każdy szereg (4), zbieżny w zbiorze E, posiadał 4-wymiarowy obszar zbieżności $D(E)$ oraz jak wielki jest obszar $D(E)$. Praca daje odpowiedź na te dwa pytania przy pomocy pewnej funkcji zbioru nazwanej *rozwartością zbioru* i pewnej funkcji $t(x, y)$ jednorodnej względem zmiennych x i y i zależnej od zbioru E.

4⁰ Zagadnienie przedłużalności analitycznej było przedmiotem prac autorów F. Wolf, A. Seleznev, A. Ghika i innych. A. Ghika podał prosty warunek na to, by funkcja $f(z)$ regularna w otoczeniu punktu $z = a$, gdzie a jest punktem z góry danego obszaru jednolistnego lub wielolistnego D, była przedłużalna na cały obszar D. Warunek ten ma postać

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \right|^2 < \infty,$$

gdzie współczynniki $\lambda_{n,k}$ zależą tylko od D i od a.

Poza tym był badany problem wzrostu funkcji całkowitych, problem typu powierzchni Riemanna danej funkcji, problem zer funkcji określonej szeregiem $f(z) = \Sigma a_n z^n$ o współczynnikach całkowitych itp.

II. *Funkcje ograniczone*. Jednym z najważniejszych twierdzeń teorii funkcji analitycznych jest tzw. lemmat Schwarza i jego różne uogólnienia. Dotyczy on zbioru funkcji analitycznych jednoznacznych i ograniczonych w obszarze jednospójnym. Najprostsza jego postać jest następująca:

Każda funkcja analityczna $f(z)$ regularna w kole $|z| < R$, ograniczona $|f(z)| \leq M$ i unormowana warunkiem $f(0) = 0$, spełnia w całym kole nierówność

$$|f(z)| \leqq \frac{M}{R} |z|.$$

Twierdzenie to orzeka, że w klasie wszystkich funkcji $f(z)$ spełniających powyższe warunki istnieje funkcja ekstremalna

$$F(z) = \frac{M}{R} e^{i\Theta} z$$

posiadająca największy moduł. Abstrahując od czynnika $e^{i\Theta}$ funkcja taka jest tylko jedna.

Powstaje pytanie, czy w klasie funcji jednoznacznych, ograniczonych i w pewien sposób unormowanych w danym obszarze wielospójnym D istnieją też analogiczne funkcje ekstremalne. Podobne pytanie można też postawić dla funkcji wieloznacznych. W okresie sprawozdawczym ukazało się kilka ważnych prac z tego zakresu. Omówię niektóre z nich.

L. Ahlfors zajął się uogólnieniem lemmatu Schwarza na funkcje jednoznaczne w obszarze wielospójnym. Główny wynik pracy można wypowiedzieć w następujący sposób: W klasie wszystkich funkcji $f(z)$ analitycznych jednoznacznych w danym obszarze n-spójnym D zawierającym punkt $z = \infty$ i takich, że $|f(z)| < 1$, oraz posiadających w otoczeniu punktu $z = \infty$ rozwinięcie postaci

$$f(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$$

istnieje taka funkcja $F(z)$, dla której moduł $|a_1|$ jest największy, i funkcja ta odwzorowuje obszar D na powierzchnię Riemanna pokrywającą koło $|w| < 1$ dokładnie n-krotnie.

Z. Nehari rozszerzył lemmat Schwarza na funkcje wieloznaczne dowodząc, że jeżeli $f(z)$ jest funkcją analityczną regularną w kole $|z| < 1$ poza skończoną ilością punktów algebraicznych rozgałęzienia, pochodna $f'(z)$ jest wszędzie skończona i wszystkie wartości $f(z)$ spełniają nierówność

$$|f(z)| < 1 \text{ dla } |z| < 1,$$

to $|f'(0)| < 1$ dla wszystkich wartości $f'(0)$, przy czym równość $|f'(0)| = 1$ zachodzi tylko wtedy, gdy

$$f(z) = e^{i\Theta} \cdot z.$$

W innej swej pracy wykazał Nehari, że w klasie funkcji $f(z)$ analitycznych jednoznacznych w obszarze n-spójnym D, zawierającym punkt $z = \infty$, posiadających część rzeczywistą dodatnią $Rf(z) > 0$ i w otoczeniu punktu $z = \infty$ rozwinięcie

$$f(z) = 1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots,$$

istnieje funkcja, dla której wyrażenie $R\left(\sum_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu a_\nu\right)$, gdzie $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ są dowolnie naprzód danymi liczbami, jest największe i funkcja ta odwzorowuje dany obszar D na powierzchnię Riemanna pokrywającą półpłaszczyznę $Rz > 0$ dokładnie n razy.

A. Bermant podał inne uogólnienie lemmatu Schwarza dla funkcji $f(z)$ regularnych, ograniczonych, $|f(z)| < 1$, i unormowanych, $f(0) = 0$, w kole $|z| < 1$ zastępując warunek ograniczoności $|f(z)| < 1$ przez warunek $L_r(w/r) \leqq 0$, gdzie $w = f(z)$ i

$$L_r(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_r} \log w \,.\, d(\arg w),$$

przy czym Γ_r jest obrazem poprzez funkcję $f(z)$ okręgu $|z| = r$, gdzie $r < 1$, skierowanego dodatnio.

III. *Odwzorowania wierne i funkcje jedno-i wielolistne*. Teoria odwzorowań wiernych poczyniła w ostatnich kilkunastu latach znaczne postępy z jednej strony przez zwrócenie uwagi na tzw. funkcje ekstremalne pewnych klas funkcyj, z drugiej - przez wprowadzenie pewnych metod wariacyjnych. O postępach w tej dziedzinie informują dwa artykuły, mianowicie:[1])

G. M. Gołusin, Interior problems of the theory of schlicht functions, Washington 1947, str. VI + 138 (przekład z jęz. rosyjskiego wydany przez Office of Naval Research) i D. C. Spencer, Some problems on conformal mappings [Bull. of the Amer. Math. Soc. t. 53 (1947), str. 417—439].

Oznaczmy przez S zbiór wszystkich funkcji analitycznych jednolistnych (czyli różnowartościowych) w kole $|z| < 1$ postaci

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad |z| < 1. \tag{5}$$

Powstaje pytanie, w jakich obszarach mogą zmieniać się współczynniki $a_2, a_3, \dots$, gdy funkcja $f(z)$ przebiega zbiór S. Problem ten, zwany „problemem współczynników", jest od szeregu lat przedmiotem licznych prac. Wykazano przeszło 25 lat temu, że[2])

$$|a_2| \leqq 2 \text{ i } |a_3| \leqq 3$$

i następnie że $|a_n| \leqq e \cdot n$ dla każdego n; hipoteza Bieberbacha jednak, że

$$|a_n| \leqq n \text{ dla każdego } n,$$

nie została dotąd rozstrzygnięta.

1⁰ W okresie sprawozdawczym ogłoszono kilka prac z tego kręgu zagadnień.

Niech G będzie obszarem na jaki funkcja (5) odwzorowuje wiernie koło $|z| < 1$ i niech $A(R)$ oznacza promień największego koła mającego środek na okręgu $|w| = R$ i zawartego w obszarze G.

A. Dworecky wykazał kilka nierówności dla $|a_n|$ przy danych założeniach co do $A(R)$, gdy $R \to \infty$, np.:[1])

Jeżeli $A(R) = O(1)$, to $|a_n| = O(\log n)$.

Jeżeli $A(R) = O(R^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, to $|a_n| = O\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot n\right)$.

Jeżeli $A(R) = O(R^\alpha)$, $\alpha < 0$, to $|a_n| \to 0$.

Oznaczmy przez Σ zbiór wszystkich funkcji analitycznych jednolistnych, określonych w kole $|z| > 1$ szeregiem postaci

$$\zeta = F(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots \tag{6}$$

[1]) Artykułów tych nie znam, bo nie zdołałem ich dotąd otrzymać.

[2]) Są to rezultaty L. Bieberbacha i K. Löwnera, Math. Ann., **89** (1923), 103—121.

[1]) $A(R) = O(R)$ oznacza, że iloraz $A(R) : R$ jest ograniczony.

Każda funkcja zbioru Σ odwzorowuje więc koło $|z| > 1$ wiernie na pewien obszar nieograniczony D, zawierający wewnątrz punkt $\zeta = \infty$, przy czym punktowi $z = \infty$ odpowiada punkt $\zeta = \infty$.

G. Gołusin otrzymał w kilku swych pracach szereg wyników dotyczących funkcyj (5) zbioru S i funkcyj (6) zbioru Σ. Przytoczę kilka z nich:

Jeżeli $f(z) \in S$, to $-1 \leqq |a_3| - |a_2| \leqq 1{,}05\ldots$ oraz

$$|a_{n+1} - a_n| \leqq c \cdot n^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \log n \text{ dla } n = 2, 3, \ldots,$$

gdzie c jest pewną stałą niezależną od $f(z)$. Przy założeniu, że obszar G, na jaki funkcja $f(z)$ odwzorowuje koło $|z| < 1$, jest gwiaździsty, można poprzednią nierówność zastąpić przez

$$|a_{n+1} - a_n| \leqq C,$$

gdzie C jest pewną stałą mniejszą od 100.

Jeżeli $f(z) \in S$ i punkty z_1 i z_2 leżą na okręgu $|z| = r < 1$, to

$$\min\{|f(z_1)|, |f(z_2)|\} \leqq \frac{2r^2}{(1 - r^2)\,|z_1 - z_2|}$$

i

$$|f(z_1) + f(z_2)| - |f(z_1) - f(z_2)| \leqq \frac{4r^2}{(1 - r^2)\,|z_1 - z_2|},$$

przy czym w obu przypadkach zachodzą równości wtedy i tylko wtedy, gdy $f(z) = z/(1 - e^{i\Theta}z^2)$, $z_2 = -z_1$, $\arg z_1 = -\Theta/2$.

Jeżeli $F(z) \in \Sigma$, to dla każdych dwu różnych punktów z_1 i z_2 koła $|z| > 1$ mamy

$$\log\left|\frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1}\right| \leqq -\tfrac{1}{2}\log\left[\left(1 - \frac{1}{|z_1|^2}\right)\left(1 - \frac{1}{|z_2|^2}\right)\right].$$

2° Szereg prac poświęcono technice efektywnego wyznaczania funkcji odwzorowującej wiernie dany obszar na inny. Należą tu prace autorów: G. Carier, J. Heinhold, H. Wittich, P. Kufarev i innych.

A. Lohwater i W. Seidel podali prosty przykład krzywej Jordana zamkniętej C i zbioru punktów E położonego na C tak, że przy odwzorowaniu wiernym wnętrza krzywej C na koło $|w| < 1$ miara obrazu $f(E)$ zbioru E na okręgu $|w| = 1$ jest równa zeru, natomiast przy odwzorowaniu zewnętrza krzywej C na koło $|w| < 1$ miara obrazu $f(E)$ zbioru E na okręgu $|w| = 1$ jest dodatnia.

M. Biernacki zbadał klasę F wszystkich funkcji $w = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ regularnych w kole $|z| < 1$, przybierających co najwyżej jedną z dwu wartości w i $\varphi(w)$, gdzie $\varphi(w)$ odwzorowuje homeomorficznie płaszczyznę domkniętą w siebie tak, że $\varphi(\infty) = a_0$; dowiódł przy tym, uogólniając rezultaty Bieberbacha i Eilenberga, że istnieją w klasie F funkcje, dla których moduł $|a_1|$ osiąga maximum i że funkcje te odwzorowują wiernie koło $|z| < 1$ na obszar ograniczony, którego brzeg funkcja $\varphi(w)$ przeprowadza w siebie.

Funkcja odwzorowująca wiernie obszar na koło pozostaje, jak wiadomo, w ścisłym związku z funkcją Greena danego obszaru. Konstruując uogólnioną funkcję Greena dla obszarów wielospójnych za pomocą wielomianów znalazłem nowe kryterium regularności i nieregularności punktów brzegowych obszaru, oparte na własności ciągów wielomianów.

3^0 Niech funkcja $w = f(z)$ odwzorowuje obszar D na płaszczyźnie zmiennej $z = x + iy$ na obszar G na płaszczyźnie zmiennej $w = u(x,y) + + iv(x, y)$. Odwzorowanie to nazwijmy *quasi-conforme*, gdy jest ono homeomorficzne i funkcje u i v zamiast równań Cauchy-Riemanna spełniają ogólniejszy układ dwu równań postaci

$$\Phi_i(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0, \quad i = 1, 2,$$

gdzie funkcje Φ_1 i Φ_2 spełniają pewne dość ogólne warunki.

M. Ławrentiew badał w dwu pracach tego rodzaju przekształcenia i dowiódł, że przy pewnych założeniach co do Φ_i istnieje co najmniej 3-parametrowa rodzina odwzorowań quasi-conforme danego obszaru jednospójnego D na inny G.

M. Morse w dłuższej pracy pt. „Metody topologiczne w teorii funkcji zmiennej zespolonej" wyłożył wyniki osiągnięte wspólnie z M. Heinsem nad ogólnymi przekształceniami należącymi do klasy przekształceń wewnętrznych w sensie Stoiłowa.

4^0 Funkcję $f(z)$ analityczną w obszarze D nazywamy za P. Montelem funkcją *p-listną* w tym obszarze ($p = 1, 2, \ldots$), jeżeli każdą swą wartość przybiera co najwyżej w p punktach, a przynajmniej jedną przybiera dokładnie w p punktach. Obok funkcji wielolistnych wprowadzono (M. Biernacki, D. Spencer) funkcje średnio p-listne i połowo p-listne, gdzie p jest dowolną liczbą dodatnią.

Funkcję $f(z)$ nazywamy *średnio p-listną* w obszarze D ze środkiem $z = a$, jeżeli dla wszystkich $r \geqq 0$ mamy

$$p(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} n(re^{i\varphi})\,d\varphi \leqq p,$$

gdzie $n(re^{i\varphi})$ oznacza ilość pierwiastków równania $f(z) = a - re^{i\varphi}$. Funkcja $f(z)$ jest *połowo p-listną* w obszarze D ze środkiem $z = a$, jeżeli

$$\frac{1}{\pi R^2}\int_{0}^{R} p(r)\cdot d(\pi r^2) \leqq p, \qquad \text{dla } R > 0.$$

Funkcje powyższe były badane przez M. Biernackiego, J. L. Walsh'a, G. Alenitzyna i A. Goodmanna. Szereg twierdzeń o funkcjach jednolistnych daje się przenieść z pewnymi zmianami na ogólniejsze klasy funkcyj. Np. funkcja $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ regularna w kole $|z| < 1$ i połowo jednolistna ze środkiem $z = 0$ pokrywa swymi wartościami koło $|w| < r$, gdzie $r > \frac{1}{5}$ (wynik M. Biernackiego). Dla funkcji jednolistnych w zwykłym sensie $r = \frac{1}{4}$.

IV. *Interpolacja i aproksymacja.* Niech będzie dany pewien ciąg trójkątny funkcyj

$$p_{k,n}(z), \quad k = 0, 1, \ldots, n; \; n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

określonych we wspólnym obszarze D (np. na całej płaszczyźnie) i ciąg trójkątny funkcjonałów liniowych

$$T_{k,n}(f), \quad k = 0, 1, \ldots, n; \; n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

których polem jest pewien zbiór Z funkcji $f(z)$ określonych w obszarze D. Podporządkujmy dowolnej funkcji $f(z)$ zbioru Z ciąg

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} T_{k,n}(f) \cdot p_{k,n}(z), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

i zapytajmy, kiedy jest on zbieżny do danej funkcji $f(z)$. Jest to dość ogólny schemat interpolacji. Wzór (9) nazywamy wzorem interpolacyjnym odpowiadającym ciągom (7) i (8).

Z drugiej strony, niech będzie dany zwykły ciąg funkcyj $\{p_n(z)\}$ określonych w obszarze D i pewien ciąg funkcjonałów liniowych $\{T_n(f)\}$. Szereg

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(f) \cdot p_n(z) \tag{10}$$

podporządkowany danej funkcji $f(z)$ nazywamy szeregiem interpolacyjnym odpowiadającym ciągom $\{p_n(z)\}$ i $\{T_n(f)\}$. Schemat ten obejmuje szeregi interpolacyjne Newtona, Stirlinga, Abela itp.

1^0 Szereg prac ogłoszonych w omawianym okresie zajmuje się zagadnieniem zbieżności różnych ciągów interpolacyjnych (9) lub szeregów (10), zagadnieniem dla jakich klas funkcyj $f(z)$ dany ciąg lub szereg interpolacyjny, odpowiadający pewnej funkcji $f(z)$, jest zbieżny do tej funkcji i w jakim obszarze itp. Należą tu prace autorów J. Ibragimov-M. Keldych, M. Eweida, R. Buck, L. Gourin, Shen-Yu-Chen i innych. Np. R. Buck rozważa klasę K funkcji całkowitych typu wykładniczego i pewien ciąg funkcjonałów liniowych $T_n(f)$ określonych w klasie K i zajmuje się pytaniem dla jakiej podklasy funkcyj $f(z)$ klasy K warunek

$$T_n(f) = 0 \text{ dla każdego } n = 0, 1, \ldots,$$

pociąga za sobą tożsamość $f(z) \equiv 0$.

2^0 Niech $\{\nu_n\}$ będzie ciągiem częściowym ciągu liczb naturalnych i niech $f(z)$ będzie funkcją regularną w kole $|z| < R$, gdzie $R > 1$.

A. GELFOND i J. IBRAGIMOV rozważają pytanie, kiedy zerowanie się następujących pochodnych

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{dla wszystkich } k \text{ różnych od } \nu_1, \nu_2, \ldots$$
$$f^{(k)}(1) = 0 \quad \text{dla } k = \nu_1, \nu_2, \ldots$$

pociąga za sobą tożsamościowe zerowanie się funkcji $f(z)$. Dowodzą między innymi, że $f(z) \equiv 0$, gdy

$$R > \limsup_{n\to\infty} \left[\frac{\nu_n!}{\nu_1!\,(\nu_2-\nu_1)!\ldots(\nu_n-\nu_{n-1})!}\right]^{1/\nu_n}$$

lub gdy $\{\nu_n\}$ jest postępem arytmetycznym $\nu_n = p\cdot n - 1$, dla $n = 1, 2, \ldots$, a $f(z)$ jest funkcją całkowitą rzędu $< p/e$.

P. VERMES znalazł warunek dostateczny na to, by istniała funkcja całkowita $f(z)$ o danych z góry pochodnych

$$f^{(\mu_n)}(0) = a_n, \quad f^{(\nu_n)}(1) = b_n,$$

gdzie $\{\mu_n\}$ i $\{\nu_n\}$ są ciągami rosnącymi różnych liczb naturalnych, a $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są dowolnymi ciągami liczb zespolonych.

M. NICOLESCO wykazał, że każda funkcja trzech zmiennych $u(x, y, z)$ harmoniczna w obszarze ograniczonym domkniętym daje się jednostajnie przybliżać przez wielomiany harmoniczne. Metoda dowodu, oparta na wzorze Greena, jest analogiczna do metody dowodu twierdzenia RUNGEGO o przybliżaniu funkcyj analitycznych przez wielomiany.

W kilku pracach (S. BERNSTEIN, J. WALSH) badano zagadnienie najlepszej aproksymacji funkcji przez funkcje pewnej klasy (wielomiany, funkcje całkowite).

Kończąc wspomnę jeszcze o pewnej metodzie aproksymacji funkcji rzeczywistych zmiennej zespolonej $f(z)$ przez funkcje harmoniczne. Metodę te przedstawię na obecnym Zjeździe w osobnym komunikacie.

*

Résumé. — Streszczenie.

Les problèmes de la théorie des fonctions analytiques dans les travaux récents.

FRANCISZEK LEJA, Kraków.

L'auteur donne une revue des problèmes de la théorie des fonctions analytiques, traités dans les travaux qui ont été analysés dans *Mathematical Reviews* durant l'année 1948. Le nombre de ces travaux monte à 220. Pour faciliter la revue, les problèmes sont classés en quatre groupes: 1° les fonctions quelconques, 2° les fonctions bornées, 3° la représentation conforme, 4° l'interpolation et l'approximation des fonctions.

La plupart des résultats nouveaux obtenus dans la période mentionnée se ramènent à l'extension et à la généralisation des résultats connus. Les problèmes de l'approximation des fonctions et ceux de la représentation conforme ont été les sujets les plus fréquents.