Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Marian Haas

Kvadratura hyperboly. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 1, 87--91

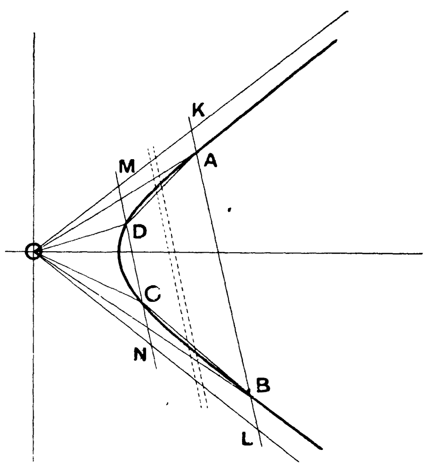
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123086`

Kvadratura hyperboly.

Napsal prof. dr. **Marian Haas.**

Plošný obsah hyperbolické úseče nebo výseče lze stanoviti bez vyšší analyse a bez dlouhých výpočtů na základě známé věty:

Libovolná sečna jest hyperbolou a oběma asymptotami rozdělena ve tři úsečky, z nichž obě krajní (obsažené mezi hyperbolou a oběma asymptotami) mají navzájem rovné délky.



Obr. 1.

Z této věty, jejíž důkaz zde opomíjíme, poněvadž se provádí na středních školách způsobem elementárním, vyplývá následující poučka, která pro naše úvahy tvoří východisko.

Vepíšeme-li do hyperboly lichoběžník, jsou hyperbolické $\left\{\begin{array}{l}\textbf{úseče}\\ \textbf{výseče}\end{array}\right\}$ mající lichoběžné strany za tětivy obsahem navzájem rovny.

Důkaz:

V lichoběžníku $ABCD$ (obr. 1.) vepsaném do hyperbolické větve budiž $AB \parallel CD$. Prodloužená strana AB protne asymptoty v bodech K, L a podobně strana CD v průsečících M, N.

Lichoběžníky $AKMD$, $BLNC$ mají navzájem rovné plochy, poněvadž dle výše zmíněné věty mají navzájem rovné základny $AK = BL$, $MD = CN$; kromě toho ležíce mezi týmiž rovnoběžkami mají též rovné výšky.

Dále se dá ukázati, že i plochy $AKMD$, $BLNC$, u nichž na místě tětiv AD, BC tvoří omezení příslušné hyperbolické oblouky, se sobě rovnají.

Vedeme-li totiž mezi přímkami KL, MN velké (nekonečné) množství příček s nimi rovnoběžných, rozdělí se každý z obou pruhů na velké množství uzounkých proužků, v nichž příslušné obloučky lze pokládati za přímky a proužky za lichoběžníky. Kterékoli dva protilehlé proužky mají obsahy rovné z důvodů právě uvedených. Součty elementárních proužků, totiž *pruhy AKMD, BLNC se sobě také rovnají.*

Jelikož úseč

$$Ú_{AD} = \text{lichob. } AKMD - \text{pruh } AKMD,$$
$$Ú_{BC} = \text{lichob. } BLNC - \text{pruh } BLNC,$$

plyne z rovnosti pravých stran též rovnost úsečí

$$Ú_{AD} = Ú_{BC},$$

čímž první část našeho tvrzení dokázána.

Na důkaz, že též výseče OAD, OBC se sobě rovnají, stačí uvésti, že

$$\triangle\, OAD = \triangle\, OMD + \square\, AKMD - \triangle\, OKA,$$
$$\triangle\, OBC = \triangle\, ONC + \square\, BCNL - \triangle\, OLB,$$

kde O značí střed křivky.

Z rovností

$$\triangle\, OKA = \triangle\, OLB,$$
$$\triangle\, OMD = \triangle\, ONC,$$

(mají navzájem rovné výšky i základny $AK = BL$, $MD = CN$) plyne též rovnost výsečí

$$OAD = OBC, \text{ q. e. d.}$$

Důsledek:

Jestliže sečna CD se vzdaluje od AB zůstávajíc s ní rovnoběžnou, až splynou body C, D v jediný bod T, stane se přímka

CD tečnou hyperboly v bodě T. Úseče nad tětivami AT, BT se sobě rovnají, a podobně platí pro výseče

$$OAT = OBT.$$

Odtud poznáváme, kterak hyperbolickou výseč OAB rozpůlíme. Třeba toliko sestrojiti tečnu rovnoběžnou k tětivě AB; k dotyčnému bodu T vedený poloměr OT půlí danou výseč.

Opomíjíme zde další důsledky, které by se daly vyvoditi z těchto vět, a přistoupíme ku stanovení vzorce pro obsah hyperbolické výseče. Z důvodů methodických budeme napřed vyšetřovati hyperbolu rovnoosou a na to známým obratem, kterým se v analytice přechází od kruhu k ellipse, vyšetříme obsah výseče a nerovnoosé hyperboly.

Rovnoosá hyperbola.

Rovnici

$$x^2 - y^2 = a^2$$

transformujeme substitucí

$$x = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}$$

na tvar

$$\xi\eta = \frac{a^2}{2} = c^2,$$

při čemž osa hyperboly se pootočí o 45^0, takže obě asymptoty, uzavírající spolu pravý úhel, stanou se souřadnými osami.

Z této rovnice jde na jevo, že obdélníky sestrojené z asymptotických souřadnic ξ, η mají pro všecky body hyperboly týž plošný obsah $c^2 = \frac{a^2}{2}$.

Poučka:

Obsah hyperbolické výseče (úseče) záleží toliko na poměru asymptotických souřadnic obou omezujících bodů.

Důkaz. Mějme dvě výseče (úseče) příslušné k bodům M_1, M_2, M_3, M_4, jichž souřadnice vázány jsou podmínkou

$$\xi_1 : \xi_2 = \xi_3 . \xi_4,$$

která se dá psáti ve formě rovnice

$$\xi_1 \xi_4 = \xi_2 \xi_3.$$

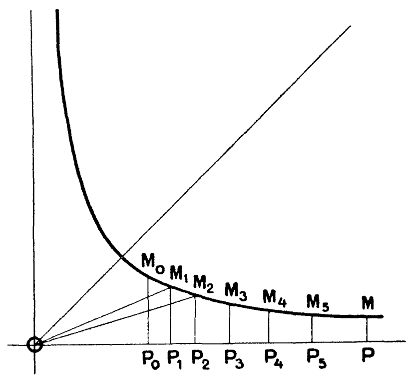
Jelikož směrnice tětivy $M_1 M_4$ dána je vzorcem

$$a_{14} = \frac{\eta_1 - \eta_4}{\xi_1 - \xi_4} = \frac{\frac{c^2}{\xi_1} - \frac{c^2}{\xi_4}}{\xi_1 - \xi_4} = -\frac{c^2}{\xi_1 \xi_4},$$

a podobně směrnice tětivy $M_2 M_3$

$$a_{23} = \frac{\eta_2 - \eta_3}{\xi_2 - \xi_3} = -\frac{c^2}{\xi_2 \xi_3},$$

jest patrno, že $M_1 M_4 \parallel M_2 M_3$, čili jinými slovy: body M_1, M_2, M_3, M_4 tvoří lichoběžník, a tudíž dle věty na počátku uvedené



Obr. 2.

jsou nejen úseče, nýbrž i výseče příslušné k tětivám $M_1 M_2$ a $M_3 M_4$ navzájem rovny.

Souřadnicový pruh (obr. 2.) omezený obloukem hyperbolickým $M_1 M_2$, pořadnicemi $\eta_1 = P_1 M_1$, $\eta_2 = P_2 M_2$ a úsečkou $\xi_2 - \xi_1 = P_1 P_2$ na ose X ležící, má obsah týž jako příslušná výseč $OM_1 M_2$. To vyplývá z rovnic

výseč $OM_1 M_2 =$ plocha $OP_1 P_2 M_2 M_1 - \triangle OP_2 M_2$,

pruh $P_1 P_2 M_2 M_1 =$ plocha $OP_1 P_2 M_2 M_1 - \triangle OP_1 M_1$,

$$\triangle OP_1 M_1 = \triangle OP_2 M_2 = \frac{c^2}{2}.$$

Také obsah souřadnicového pruhu jest závislý toliko na poměru asymptotických souřadnic omezujících bodů, poněvadž věty platné pro výseč platí eo ipso též pro příslušný souřadnicový pruh, jak patrno z rovnosti obsahů.

Úloha čís. 1. Daný pruh (výseč) má se rozpůliti.

Začíná-li pruh u hyperbolického bodu M_0 (ξ_0, η_0) a končí u $M(\xi, \eta)$, jest úsečka hledaného bodu M_1 (ξ_1, η_1) dána úměrou

$$\xi_0 : \xi_1 = \xi_1 : \xi,$$

čili

$$\xi_1 = \sqrt{\xi_0 \xi},$$

kterážto rovnice nám dostatečně naznačuje, kterak by se hledaný bod měl konstruovati. (Pokračování.)

Věta Dandelinova a její applikace.

Napsal prof. **Jaroslav Doležal.**

Slavný *Chasles* ve svém krásném díle: „*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*" na str. 286 a 287 uvádí větu *Dandelinovu* v tomto znění:

„*Sečeme-li rotační kužel rovinou ϱ a vepíšeme-li kuželi tomu dvě koule, jež dotýkají se zároveň roviny ϱ, jsou dotyčné body koulí a roviny ϱ ohnisky řezu; roviny dotyčných kružnic koulí a kužele sekou rovinu řezu o ve dvou přímkách, jež jsou řídícími přímkami řezu.*"

Věta tato, jejíž důkaz uvádí se v deskriptivní geometrii pro střední školy [1]), vede k velmi pěkným důsledkům, jež dále uvedeme, a zaslouží, aby jí při vyučování geometrii více pozornosti bylo věnováno, na což zvláště upozorňujeme.

Důkaz známý odjinud, zde pouze doplníme.

Budiž dán kužel rotační osou $\overline{sv}$ v II. průmětně, rovina řezu ϱ pak nechať jest k II. průmětně kolmá; úsečka $\overline{ab}$ stopy N^{ϱ} jest pak druhým průmětem řezu. (Obr. 1.)

Tvar řezu záleží, jak známo, na odchylce roviny řezu od základny; svírá-li strana kužele se základnou úhel α, rovina řezu

---

*) Viz na př. učebnici p. prof. V. Jarolímka: Deskript. geometrie pro vyšší reálky, str. 148.