

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Láska

O sestrojování vzorců empirických. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 1, 9--15

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123094>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1911

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Jeden dvojný bod příslušný parametru $+x$, je reálný úběžný bod fokály, druhý odpovídající parametru $-x = \frac{b}{a}$ má souřadnice

$$x = \frac{1}{2} \frac{bc}{a^2 + b^2}$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{ac}{a^2 + b^2}$$

a to je ohnisko fokály, společný to tangenciální bod v imaginárních kružných bodů, neb platí

$$(+i)^2 v = (-i)^2 v = x$$

tedy $v = -x$.

0 sestrojování vzorců empirických.

Píše V. Láška.

I.

Pozorování fysikální dává nám číselný materiál vyjadřující v nejjednodušším případě vzájemnou závislost dvou veličin u a v . Vyjádření oné závislosti v tvaru funkce, t. j. rovnici

$$F(u_1, v) = 0$$

bývá pak jedním z hlavních úkolů vědy. Všeobecně v příručkách uváděná metoda zakládá se na parabolických vzorech interpolačních. Nebude tedy od místa, podáme-li metodu novou a všeobecnější, založenou na známých větvích geometrie polohy.

Budiž dána řada hodnot

$$u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \dots$$

$$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \dots$$

odvozených empiricky. Veličinami u , v stupňujeme dvě přímky, U a V . Tím obdržíme dvě řady bodové, jež bude lze uvést do polohy perspektivní, když dvojpoměr čtyř libovolných bodů jedné řady rovnatí se bude dvojpoměru bodů sdružených řady druhé.

Máme-li čtyři hodnoty

$$u_x \quad u_\lambda \quad u_\mu \quad u_\nu$$

$$v_x \quad v_\lambda \quad v_\mu \quad v_\nu$$

seřaděné dle velikosti a zavedeme-li známý symbol

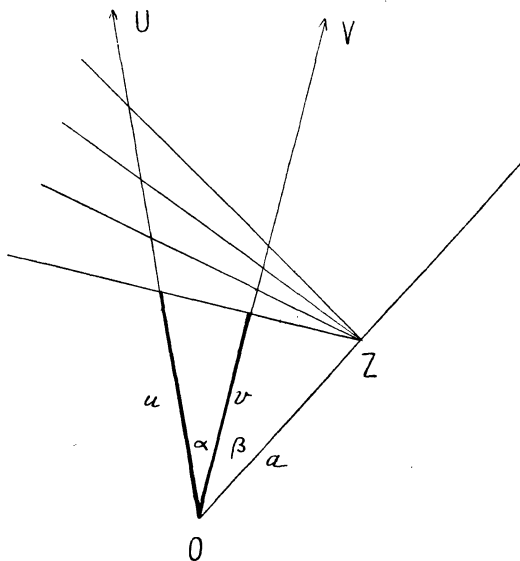
$$(u_x u_\lambda u_\mu u_\nu) \equiv \frac{u_\mu - u_x}{u_\mu - u_\lambda} \cdot \frac{u_\lambda - u_x}{u_\nu - u_x},$$

bude

$$(u_x u_\lambda u_\mu u_\nu) = (v_x v_\lambda v_\mu v_\nu). \quad (1)$$

Závislost veličin u a v stanovena jest rovnicí

$$(u \ u_x u_\lambda u_\mu) = (v \ v_x v_\lambda v_\mu). \quad (2)$$



Obr. 1.

Abychom obdrželi grafickou konstrukci, nutno uvážit, že řady vyhovující rovnici (1) jsou v poloze perspektivní, kryjí-li se dva sdružené body.

Platí-li to pro

$$u = v = 0,$$

bude zároveň:

$$\frac{\sin \alpha}{u} + \frac{\sin \beta}{u} = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{v}. \quad (3)$$

Kde (viz obr. 1.)

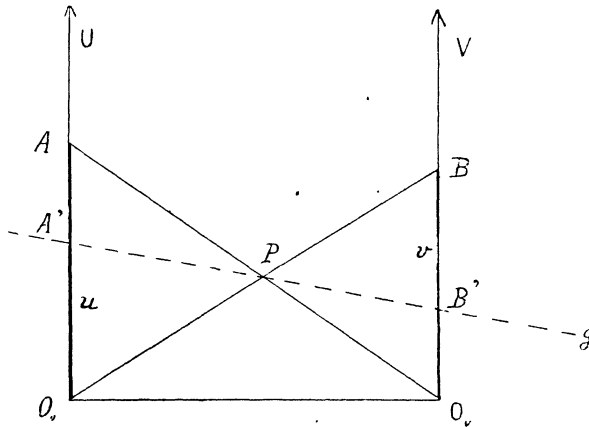
$$\sphericalangle \alpha \equiv \sphericalangle UOV$$

$$\sphericalangle \beta \equiv \sphericalangle VOZ$$

$$OZ = a$$

a Z jest středem promítání.

Bod Z obyčejně leží mimo nákresnu. Proto metoda ta nedoporučuje se k praktickému provedení. Vzhledem k tomu a abychom zároveň obdrželi metodu schopnou zvlášť obecnění, volíme následující obdobu uvedené konstrukce.



Obr. 2.

Narysujme dvě rovnoběžky $O_u U$ a $O_v V$, protnuté pravouhelně přímkou $O_u O_v$ a nanesme (viz obr. 2.)

$$u = O_u A', \quad v = O_v B'.$$

Tak zvaný bod *nomografický* bude pak průsečíkem přímek $O_v A$ a $O_u B$.

Snadno dokážeme větu:

Leží-li nomografické body (u, v) na přímce g , platí rovnice

$$\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} = 1, \quad (4)$$

kde

$$\alpha = O_{vA'} \quad \text{a} \quad \beta = O_{vB'}.$$

Stálé α a β vypočteme z determinantu:

$$\begin{vmatrix} uv & u & v \\ u_x v_x & u_x & v_x \\ u_\lambda v_\lambda & u_\lambda & v_\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Rovnici (4) píšme všeobecně:

$$\frac{\alpha}{F(x)} + \frac{\beta}{f(y)} = 1$$

čili

$$F(x) = \frac{\alpha f(y)}{f(y) - \beta}. \quad (6)$$

Tím obdrželi jsme základní rovnici pro sestrojování vzorců empirických a sice v tvaru nejjednodušším.

Klademe obyčejně

$$u = ax, \quad v = by.$$

Někdy doporučují se kombinace

$$u = a \log \frac{x}{b}, \quad v = cy,$$

$$u = ax, \quad v = b \log \frac{x}{c},$$

$$u = ax^2, \quad v = bx,$$

a podobné, dle povahy veličin x a y .

Všeobecná pravidla neexistují. O některých cestách vedoucích k stanovení tvaru funkcí f a F promluvíme jindy.

Prvým příkladem budiž *ubývání tlaku s výškou ve volné atmosféře*. Číselný materiál volen dle *Schuberta* (*Zeitschrift für wiss. Forsch. der höh. Luftschichten* 1904. Str. 148). Z ohledu na to, že tlak jest povahy logaritmické, poloźme

$$u = \frac{H}{100} i,$$

$$v = 100 \log \frac{762}{b} \cdot i,$$

kde H jest výškou v metrech, b tlakem v millimetrech a i libovolnou jednotkou délky

Tím obdržíme následující tabulku, jež podává hodnoty pozorované a vypočtené pomocí vzorce

$$v = \frac{442 \cdot 6 u}{856 \cdot 2 - u},$$

jehož stálé odvozeny byly jednoduše — jdeť o pouhý příklad — z $H = 10.000 m$ a $H = 5000 m$.

Větší odchylku u $H = 6000$ vysvětluje poznámka autora, že hodnota ta obdržena grafickou interpolací.

Materiál sám není ovšem, jsa výsledkem pozorování máloletých, absolutně přesný, proto také konstanty α a β nepočítali jsme methodou nejmenších čtverců.

H	b	u	v		rozdíl
			pozor.	počet	
10.000	198	100	58·53	58·53	0·00
9.000	230	90	52·02	51·99	+ 0·03
8.000	266	80	45·71	45·62	+ 0·09
7.000	308	70	39·34	39·41	— 0·07
6.000	355	60	33·17	33·35	— 0·18
5.000	405	50	27·45	27·45	+ 0·00
4.000	462	40	21·73	21·69	+ 0·04
3.000	525	30	16·18	16·07	+ 0·11
2.000	596	20	10·67	10·59	+ 0·08
1.000	674	10	5·33	5·24	+ 0·09
0	762	0	0·00	0·00	0·00

Podobně lze na základě čísel týmž autorem uveřejněných vyjádřiti *vztahy mezi specifickou vlhkostí s a teplotou t z jedné strany a výškou H z druhé strany* rovnicemi

$$10 - t = \frac{212 \cdot 42 H}{44484 - H},$$

$$s = \frac{9240 - H}{0 \cdot 53 H + 1370},$$

jak to dokazují následující tabulky:

H	s		rozdíl
	pozor.	počet	
2000	3·00	3·00	0·00
3000	2·17	2·10	+ 0·07
4000	1·54	1·50	+ 0·04
5000	1·07	1·05	+ 0·02
6000	0·70	0·71	— 0·01
7000	0·40	0·44	— 0·04
8000	0·18	0·22	— 0·04
9000	0·05	0·04	+ 0·01

H	t		rozdíl
	pozor.	počet	
2000	— 0·0	0·0	0·0
3000	— 5·1	— 5·1	0·0
4000	— 10·7	— 10·9	+ 0·2
5000	— 16·8	— 16·8	0·0
6000	— 23·2	— 23·1	— 0·1
7000	— 30·0	— 29·8	— 0·2
8000	— 37·0	— 36·6	— 0·4
9000	— 44·2	— 43·9	— 0·3
10.000	— 51·6	— 51·6	0·0

Prvý vzor daleko předčí známou formuli *Mendelejefa*

$$\frac{t + 50}{t_0 + 50} = \frac{b}{b_0},$$

kde t_0 a b_0 jsou hodnoty pro $H = 0$. Druhý pak jest jednodušší vzoru

$$s = s_0 e^{-\frac{H}{9} \left(1 + \frac{H}{12}\right)}$$

odvozeného *Süringem*.

Jako další příklad uvádíme vztah mezi rychlostí větru v měřenou anemometrem a pozorovanou b dle škály 12tistupňové,

$$v = \frac{46 b}{32 - b}$$

podávající absolutně přesně čísla odvozená *Köppenem*. (Viz: *Hann*, Lehrbuch der Meteorologie I. vyd. Str. 377.) Pro vztah ten nebyl dosavade vůbec znám empirický vzorek.

Z fyziky patří sem, jako klasický příklad, vzorek, jímž hleděl *Magnus* vyjádřiti *souvislost mezi teplotou a tlakem vodních par*.

Pročítaje pojednání toho badatele (*Poggend*, Ann. Sv. LXI, viz také *Dove*, Repertorium. I. Sv.) čtenář nejlépe ocení důležitost zde podané metody.

Zákon Balmerův podávající stavbu spektra vodíku (viz Novák, O stavbě spekter emissních. Čas. roč. 35., str. 353) jest význačným příkladem typu kvadratického

$$v = \frac{au^2}{u^2 - \beta}.$$

Podobných příkladů mohli bychom uvést mnoho. Aplikaci na některé problémy meteorologické a jiné najde čtenář v mých pojednáních uveřejněných toho roku v král. české učené společnosti a ve vídeňské akademii.

Nemalou výhodou zde uvedených vzorců jest jich jednoduchost. Mnohý problém nemohl býti dosavade řešen jen z té příčiny, poněvadž interpolační vzorce, odvozené z pozorování a vložené do příslušných rovnic diferenciálních, dávaly rovnice, jež nebylo lze integrovati.

(Pokračování.)

O křivce horopter.

Napsal V. Jeřábek.

1. Buď dán rotační válec mající svou podstavu na průmětně π (obr. 1.) v kruhu L_1 , a svůj střed na ose $X_{1,2}$, v níž jest druhý průmět kruhu L_1 . Na kružnici L_1 vytkneme bod $S \equiv S_1$ tak, aby jeho průmět druhý S_2 připadl do středu kruhu L_1 ; pak vedme bodem S některou tečnu T daného válce a sestrojme její průměty $T_1 \parallel X_{1,2}$, T_2 . Vyznačme ještě v kruhu L_1 koncový bod průměru $S_1S_2r_1$, a v r_1 postavme kolmici R na průmětnu π ; kolmice tato má patrně svůj průmět R_1 v r_1 a $R_2 \perp X_{1,2}$. Geom. místem přímek M , jež jsou s průmětnou π