Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Mařík

Mocninné řady na obvodě konvergenčního kruhu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 73 (1948), No. 1, D3--D6

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123147`

Podmínka je postačující. I. Budiž $\mathfrak{T}_0 = \underset{Z}{\mathrm{E}}[Z \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}),$ $Z(M_1 \times M_2) \in \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)]$. Z vlastnosti systému $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ plyne $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{T}_0$, dále je $\mathfrak{T}_0 \subset \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ a lehce se dokáže, že $\mathfrak{T}_0$ je množinové σ-těleso. Je tedy $\mathfrak{T}_0 = \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

II. Nechť $\mathfrak{T}' = \underset{Z}{\mathrm{E}}[Z \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), Z \subset M_1 \times M_2 \Rightarrow Z \in \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)]$. Platí $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{T}' \subset \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Když $Z_i \in \mathfrak{T}'$ $(i = 1, 2, \ldots)$ a $\sum_{i=1}^{\infty} Z_i \subset M_1 \times M_2$, pak $Z_i \subset M_1 \times M_2$ pro každé i a tedy $Z_i \in \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$ a proto $\sum_{i=1}^{\infty} Z_i \in \mathfrak{T}'$. Nechť $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{T}'$. Jestliže $Z_1 - Z_2 \subset M_1 \times M_2$, pak $Z_1 . (M_1 \times M_2) - Z_2(M_1 \times M_2) = Z_1 - Z_2$ a $Z_i(M_1 \times M_2) \in \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$ $(i = 1, 2)$ podle I. Je tedy také $Z_1 - Z_2 \in \mathfrak{T}'$. $\mathfrak{T}'$ je proto množinové σ-těleso, tedy $\mathfrak{T}' = \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Je proto $\mathfrak{T} = \underset{Z}{\mathrm{E}}[Z \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), Z \subset M_1 \times M_2] \subset \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$.

III. $\mathfrak{T}$ je ale množinové σ-těleso, jak se lehce ukáže a to nad $(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$. Musí tedy být $\mathfrak{T} = \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$ j. b. d.

Podmínku lze nahradit postačující: Když $A \times B \in (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, pak $AM_1 \in t(\mathfrak{A}^*)$ a $BM_2 \in t(\mathfrak{B}^*)$, resp. když $A \times B \in (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ pak $AM_1 \in \tau(\mathfrak{A}^*)$ a $BM_2 \in \tau(\mathfrak{B}^*)$. Neboť $(A \times B) . (M_1 \times M_2) = M_1 A \times M_2 B$ a $(t(\mathfrak{A}^*), t(\mathfrak{B}^*)) \subset t(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$, resp. $(\tau(\mathfrak{A}^*), \tau(\mathfrak{B}^*)) \subset \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$. Tato podmínka je splněna, když $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou množinová tělesa.

Mocninné řady na obvodě konvergenčního kruhu.

Jan Mařík, Praha.

Věta 1. Mějme posloupnosti komplexních čísel $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ Označme $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$. Nechť existuje A tak, že platí $|\sigma_n| \leqq A$ pro každé n. Budiž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n|$ konvergentní; budiž $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Pak je řada $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\beta_n$ konvergentní.

Důkaz: $\sum_{n=0}^{m} \alpha_n\beta_n = \sigma_0\beta_0 + \sum_{n=1}^{m} (\sigma_n - \sigma_{n-1}) \beta_n = \sigma_0\beta_0 + \sum_{n=1}^{m} \sigma_n\beta_n - \sum_{n=1}^{m} \sigma_{n-1}\beta_n = \sigma_0\beta_0 + \sum_{n=1}^{m} \sigma_n\beta_n - \sum_{n'=0}^{m-1} \sigma_{n'}\beta_{n'+1} = \sigma_0\beta_0 + \sigma_m\beta_m + \sum_{n=1}^{m-1} \sigma_n\beta_n -$

$$-\sum_{n=1}^{m-1}\sigma_n\beta_{n+1}-\sigma_0\beta_1=\sum_{n=0}^{m-1}\sigma_n(\beta_n-\beta_{n+1})+\sigma_m\beta_m.$$

Protože $|\sigma_m|\leqq A$, $\lim_{m\to\infty}\beta_m=0$, je též $\lim_{m\to\infty}\sigma_m\beta_m=0$. Také existuje $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m-1}\sigma_n(\beta_n-\beta_{n+1})$; to je totiž součet řady, jejíž členové mají nejvýš takovou prostou hodnotu, jako členové řady $\sum_{n=0}^{\infty}A|\beta_n-\beta_{n+1}|$, která je podle předpokladu konvergentní. Existuje tedy též

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{m-1}\sigma_n(\beta_n-\beta_{n+1})+\sigma_m\beta_m\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{m}\alpha_n\beta_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n.$$

Věta 2. Mějme přirozené číslo K. (Nevylučujeme $K=1$.) Mějme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{Kn}$ o poloměru konvergence $R>0$. Budiž $|z_0|=R$; řada $\sum_{n=0}^{\infty}|a_{n+1}z_0^{K(n+1)}-a_nz_0^{Kn}|$ budiž konvergentní; budiž $\lim_{n\to\infty}a_nz_0^{Kn}=0$. Pak je řada $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{Kn}$ konvergentní všude na obvodě konvergenčního kruhu nejvýš s výjimkou těch z, pro která platí $z=z_0\,.\,e^{i\,.\,\frac{2k\pi}{K}}$, $k=0,1,\ldots,K-1$.

Důkaz: Zvolme z_1 na obvodě konvergenčního kruhu, tedy $|z_1|=R$. Protože $\left|\frac{z_1}{z_0}\right|=1$, existuje φ, $0\leqq\varphi<2\pi$, tak, že platí $z_1=z_0\,.\,e^{i\varphi}$. Předpokládejme nyní, že $\varphi\neq\frac{2k\pi}{K}$ pro $k=0,1,\ldots,K-1$. Pak je $0\leqq K\varphi<2K\pi$, $K\varphi\neq2k\pi$, tedy $e^{iK\varphi}\neq1$. Pak platí $1+e^{iK\varphi}+e^{i2K\varphi}+\ldots+e^{inK\varphi}=\frac{1-e^{i(n+1)K\varphi}}{1-e^{iK\varphi}}$; označíme-li $e^{inK\varphi}=\alpha_n$, jest $\left|\sum_{n=0}^{m}\alpha_n\right|\leqq\frac{2}{|1-e^{iK\varphi}|}$. Označíme-li ještě $a_nz_0^{Kn}=\beta_n$, je podle věty 1. konvergentní řada $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n=\sum_{n=0}^{\infty}e^{inK\varphi}\,.\,a_n\,.\,z_0^{Kn}=$
$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z_0\,.\,e^{i\varphi})^{Kn}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz_1^{Kn}$.

Věta 3. I. Mějme přirozené číslo K a mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{Kn}$ o poloměru konvergence $R > 0$. Nechť existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha$. Pak je $|\alpha| = R^K$. II. Budiž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, R^{Kn}$ divergentní. Budiž $|z_0| = R$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} z_0^{K(n+1)} - a_n z_0^{Kn}|$ pak může být konvergentní jen tehdy, je-li $z_0^K = \alpha$.

Důkaz části I. Především je $\alpha \neq 0$. Kdyby totiž bylo $\alpha = 0$, $|z| \neq 0$, byla by $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{K(n+1)}}{a_n z^{Kn}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|^K}{\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} = +\infty$ a řada by byla absolutně konvergentní jen pro $z = 0$.

Je tedy $\alpha \neq 0$. Pak existuje $q = \lim \frac{a_{n+1} z^{K(n+1)}}{a_n z^{Kn}} = \frac{z^K}{\alpha}$ pro každé $z \neq 0$. Je-li $|z| < \sqrt[K]{|\alpha|}$, je $|q| < 1$ a řada je absolutně konvergentní; je-li $|z| > \sqrt[K]{|\alpha|}$, je $|q| > 1$ a řada nekonverguje ani relativně, protože od jistého indexu prostá hodnota členů dokonce roste. Je tedy $R = \sqrt[K]{|\alpha|}$ neboli $R^K = |\alpha|$.

Důkaz části II. Budiž $z_0^K \neq \alpha$, $|z_0| = R$. Pak existuje N_1, že $n > N_1 \Rightarrow a_n \neq 0$ (jinak by nemělo smysl mluvit o limitě výrazu $\frac{a_n}{a_{n+1}}$). Označme $|z_0^K - \alpha| = 2\varepsilon$. Pak existuje N_2, že

$$n > N_2 \Rightarrow \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| z_0^K - \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \geqq |z_0^K - \alpha| -$$

$$- \left| \alpha - \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| > \varepsilon.$$

Zvolme $n > \max(N_1, N_2)$. Pak platí $|a_{n+1} z_0^{K(n+1)} - a_n z_0^{Kn}| = |a_{n+1} z_0^{Kn}| \cdot \left| z_0^K - \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| > |a_{n+1}|\, R^{K(n+1)} \cdot \frac{\varepsilon}{R^K}$. To je člen divergentní řady. Nemůže tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} z_0^{K(n+1)} - a_n z_0^{Kn}|$ být konvergentní.

Příklad. U řady $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n+1} \left(= \frac{\operatorname{arc\,tg} z}{z} \text{ pro } 0 < |z| < 1\right)$ je $K = 2$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = -1$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}z^{K(n+1)} - a_n z^{Kn}|$ může být pro $|z| = 1$ konvergentní jen pro $\pm i$. Tam však konverguje. Platí tedy $\operatorname{arc\,tg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ i pro $|z| = 1$ mimo body $\pm i$.

Algebraická křivka v prostoru jako průsek ploch.

Dr. Josef Metelka, Jablonec nad Nisou.

Algebraická křivka v prostoru není vždy úplným průsekem dvou algebraických ploch. Jako příklad nám může sloužit prostorová kubika, jež je dokonale určena teprve třemi kvadratickými plochami. Vznikla tudíž otázka, kolika ploch jest obecně potřeba k určení alg. křivky v prostoru. Hoření hranici stanovili ryze algebraickou cestou Kronecker[1]), Molk[2]) a König[3]) pro r-rozměrný prostor: Algebraická křivka v r-rozměrném prostoru jest určena nejvýše $r+1$ nadplochou. Tato věta se proto nazývá (zejména v německé literatuře) větou Kroneckerovou.

O deset let později po Kroneckerovi podal K. T. Vahlen[4]) příklad křivky v obyčejném prostoru, k jejímuž určení jest skutečně třeba čtyř ploch. Je to racionální křivka pátého stupně s jedinou kvadrisekantou. Tento příklad jest od té doby citován a přijímán všemi geometry (viz na př. J. Vojtěch[5]), E. Bertini[6]) a j.) a křivka se nazývá Vahlenova.

Otázka se zdála být rozřešena, až v r. 1942 upozornil O. Perron (přesný název článku nemohu bohužel udat), že Vahlenův příklad je chybný. Jeho křivka je prý úplným průsekem již tří ploch. Otvírají se tedy nové problémy: Buď nalézti nový a skutečně správný příklad křivky, k jejímuž určení nestačí tři plochy, anebo dokázati obecně, že stačí již tři plochy k určení každé křivky v prostoru.

Pokusím se naznačit, jakých cest je možno použít. Dokážeme si dvě věty:

a) *Křivka c^n stupně n, která má aspoň jednu $(n-1)$-sekantu, jest určena třemi plochami.*

$(n-1)$-sekanta budiž p, na ni zvolíme mimo křivku dva body A, B. Z každého z těchto bodů se křivka c^n promítá racionálním