Antonín Jeřábek
O větě Lehmusově

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 2, 133--138

O větě Lehmusově.

Napsal

Ant. Jeřábek, professor v Klatovech.

V trojúhelníku ABC, jehož dva úhly A a B se rozpolují příčkami sobě rovnými ($AD = BE$), jsou protější strany (BC a AC) sobě rovny.

Proprava.

1. Spusťme $EF \perp BC$, $DG \perp AC$, $OH \perp AB$ (obr. 10); i jest

$$CE : CD = EF : DG \quad (\triangle ECF \sim \triangle DCG);$$
$$EF : EB = OH : OB \quad (\triangle EFB \sim \triangle OHB);$$
$$AD : DG = OA : OH \quad (\triangle DGA \sim \triangle OHA).$$

Znásobíme-li stejnolehlé členy úměr těchto, obdržíme

$$CE : CD = OA : OB. \qquad \text{(I)}$$

2. Protože příčka AD rozpoluje $\sphericalangle CAB$, jest platna i úměra:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC + AB}{CB},$$

z níž

$$CD\,(AC + AB) = AC \,.\, CB.$$

Podobně vyplývá

$$CE\,(BC + AB) = AC \,.\, CB.$$

Srovnáme-li oba tyto výsledky, obdržíme:

$$CE\,(BC + AB) = CD\,(AC + AB). \qquad \text{(II)}$$

3. Opišme kruh kolem $\triangle ABC$ a prodlužme AD a BE až se protnou s ním v bodech L a J, i bude $\triangle ACL \sim \triangle ADB$ a odtud

$$AL \,.\, AD = AC \,.\, AB.$$

Rozvedeme-li

$$AL = AD + DL,$$

bude též

$$AD^2 + AD \,.\, DL = AC \,.\, AB$$

čili

$$AD^2 + CD \,.\, DB = AC \,.\, AB,$$

odkud

$$AD^2 = AC \,.\, AB - CD \,.\, DB. \qquad \text{(III)}$$

1. Důkaz. Označme

$$\sphericalangle CAB = 2\alpha, \quad \sphericalangle ABC = 2\beta, \quad \sphericalangle BCA = 2\gamma$$

(obr. 11.). Spojme C s O i rozpůlí se $\sphericalangle ACB$, protože se příčky rozpolující úhly trojúhelníka v jediném bodě protínají, takže $\sphericalangle ACO = \sphericalangle BCO = \gamma$. Vedeme-li $E'D' \perp CO$ a učiníme-li $CE' = CE$, $CD' = CD$, jest $\triangle CE'D \cong \triangle CED'$, protože zároveň i $\sphericalangle E'CD = R + \gamma = \sphericalangle ECD'$; odtud pak $E'D = ED'$. Protože ale podle (I)

$$CE' : CD = OA : OB \quad \text{a} \quad \sphericalangle E'CD = \sphericalangle AOB,$$

jest $\triangle E'CD \sim \triangle AOB$ a proto $\sphericalangle CE'D = \alpha$, $\sphericalangle CDE' = \beta$ a odtud $\sphericalangle E'DA = \alpha + \beta$; podobně $\sphericalangle CED' = \alpha$, $\sphericalangle CD'E = \beta$ a $\sphericalangle D'EB = \alpha + \beta$. Potom ale $\triangle ADE' \cong \triangle BD'E$ ($AD = BE$; $DE' = ED'$ a $\sphericalangle E'DA = \sphericalangle D'EB$) a tedy $AE' = BD'$. Poněvadž pak $\sphericalangle CE'D = \alpha = \sphericalangle CAD$, leží body A, D, C, E' na kruhu a proto obvodový úhel $E'AC = \sphericalangle E'DC = \beta$. Sřízneme-li $CB' = CA$, bude $\sphericalangle CB'A = \sphericalangle E'CA = \alpha + \beta$ a $\sphericalangle DAB' = \beta = \sphericalangle E'AC$ a potom $\triangle DAB' \sim \triangle E'AC$, odkud

$$AE' : AD = E'C : DB'$$

čili
$$AE' : AD = CE : (CB' - CD)$$

a také
$$AE' : AD = CE : (AC - CD).$$

Stejným spůsobem vychází:

$$BD' : BE = CD : (CB - CE)$$

a, protože $AE' = BD'$, z obou posledních úměr

$$CE : (AC - CD) = CD : (CB - CE)$$

čili
$$CB \, . \, CE - CE^2 = AC \, . \, CD - CD^2.$$

Odečteme-li rovnici tuto od (II) a připočteme-li stejninu $CD \, . \, CE = CD \, . \, CE$, obdržíme konečně

$$CE\,(AB + CE + CD) = CD\,(AB + CE + CD);$$

z toho $\quad CE = CD$ a podle (II) $BC = AC$.

2 *Důkaz.* Opišme kruhy kolem $\triangle ADC$ a $\triangle BEC$ (obr. 12.) i budou stejné, protože v obou nad stejnými tětivami ($AD = BE$)ční stejný úhel obvodový (2γ). Přetneme-li tedy kruh K délkou $CE' = CE$ a K' délkou $CD' = CD$, bude obvodový $\sphericalangle CDE' = \sphericalangle CBE = \beta$*) a $\sphericalangle CED' = \sphericalangle CAD = \alpha$. Protože $\sphericalangle E'AD = \sphericalangle E'DA = \alpha + \beta$, jest $AE' = DE'$. Podobně také se dokáže, že $BD' = ED'$.

Podle věty Ptolemaiovy v čtyrúhelníku z tětiv jest

$$AC \, . \, E'D = AD \, . \, CE' + CD \, . \, AE'$$

čili
$$DE' \, . \, (AC - CD) = AD \, . \, CE'.$$

Týmž spůsobem vyplývá i

*) *Poznámka.* V $\triangle ACE'$ jest $\sphericalangle CAE' < CE'A$, protože $CE' < CA$; tudíž $\sphericalangle CAE' < R$; pak ale i $\sphericalangle CDE' < R$ i nemůže tedy $\sphericalangle CDE' = 2R - \beta$, neboť $\sphericalangle \beta$ musí býti $< R$.

$$ED'(BC - CE) = BE \,.\, CD'.$$

Dělíme-li poslední dvě rovnice spolu, majíce na zřeteli, že $DE' = ED'$ ($\triangle ADE' \cong \triangle BED'$), obdržíme

$$\frac{AC - CD}{BC - CE} = \frac{CE}{CD}$$

a odtud

$$BC \,.\, CE - CE^2 = AC \,.\, CD - CD^2.$$

Odečteme-li opět rovnici tuto od (II) a přičteme-li na obou stranách $CD \,.\, CE$, obdržíme podle (II) $BC = AC$.

3. *Důkaz.* Protože příčka $AD \sphericalangle CAB$ rozpoluje (obr. 10.), jest

$$AC : AB = CD : BD$$

čili

$$AC^2 : AB \,.\, AC = CD^2 : CD \,.\, BD,$$

odkud odečtením předních a zadních členů vyplývá

$$(AC^2 - CD^2) : (AB \,.\, AC - CD \,.\, BD) = CD : BD$$

a podle (III)

$$(AC - CD)(AC + CD) : AD^2 = CD : BD. \qquad (1)$$

Spojíme-li C s O, rozpůlí se i $\sphericalangle ACB$ a odtud

$$\frac{AC}{OA} = \frac{CD}{OD} = \frac{AC + CD}{AD},$$

takže

$$CD = \frac{OD}{AD}(AC + CD).$$

Vložíme-li výsledek tento do (1) a zkrátíme-li, obdržíme:

$$(AC - CD) : AD = OD : BD. \qquad (2)$$

Podobně též

$$(BC - CE) : BE = OE : AE. \qquad (3)$$

Dělením pak (2) a (3),

$$\frac{AC - CD}{BC - CE} = \frac{OD \,.\, AE}{OE \,.\, BD}. \qquad (4)$$

Protože

$$OA : AB = OD : BD$$
$$AB : OB = AE : OE,$$

jest i platná úměra dle (I)

$$CE : CD = OD \,.\, AE : OE \,.\, BD.$$

Ze (4) pak konečně

$$\frac{AC - CD}{BC - CE} = \frac{CE}{CD},$$

odkud podobným spůsobem jako na hoře

$$AC = BC$$

vyplývá.

4. *Důkaz nepřímý.* Vedeme-li $DE' \parallel ED' \parallel AB$ (obr. 13.), splývají přímky DE' a ED' v jedinou. — Kdyby totiž jinak bylo, bylo by buď $AE < AE'$ nebo $AE > AE'$. Dejme tomu, že by

$$AE < AE' \tag{1}$$

bylo, pak by

$$(AC - AE) > (AC - AE')$$

čili $CE > CE'$ bylo; odtud by pak vyplývalo

$$ED' > E'D \tag{2}$$

a $CD' > CD$, jak z úměry $CE : CE' = ED' : E'D = CD' : CD$ vysvítá. I bylo by též $(CB - CD') < (CB - CD)$ čili

$$BD' < BD. \tag{3}$$

Protože pak

$$ED' = BD' \ (\sphericalangle \beta = \sphericalangle \delta) \text{ a } E'D = AE' \ (\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \gamma),$$

bylo by podle (2)

$$AE' < BD' \tag{4}$$

a podle (1) a (3)

$$AE < BD. \tag{5}$$

Spustíme-li pak $D'O \perp BE$, $E'Q \perp AD$, prodloužíme-li $E'Q$ do H a učiníme-li $\sphericalangle QAH = \beta$, bylo by, protože $AH = BD'$ ($\triangle AQH \cong \triangle BOD'$), podle (4) $AH > AE'$ a proto v $\triangle AE'H$: $\sphericalangle AE'Q > \sphericalangle AHQ$, tudíž $(R - \sphericalangle AE'Q) < (R - \sphericalangle AHQ)$ čili $\alpha < \beta$. Pak by byly v $\triangle ABE$ a $\triangle ABD$ dvě strany stejné a úhly jimi sevřené nestejné, i bylo by $AE > BD$, což dle (5) býti nemůže. K podobné nesrovnalosti dospěli bychom, kdybychom položili $AE > AE'$. Nezbývá tedy, než že splývají přímky DE' a ED' v jedinou, potom ale jsou rovnoramené $\triangle ADE$ a $\triangle BED$ shodné a $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$ čili $A = B$, odkud konečně $$BC = AC.$$

Poznámka redakce.

Že jsou příčky, rozpolující úhly při podstavě rovnoramenného trojúhelníka, sobě rovny, možno snadně dokázati; ale jinak větu obrácenou, hořejší, zvanou Lehmusovu, nemožno tak jednoduše odůvodniti, jak by se na první pohled souditi mohlo, jejíž čtyři nové důkazy oznamuje nám prof. *A. Jeřábek.*

Tuto větu předložil *Lehmus* r. 1840. proslulému *Steinerovi*, přeje si, aby podal její ryze geometrické řešení. *Steiner* dokázal touž větu i analogickou pro sférický trojúhelník v Crelle-ově žurnálu, svaz. 28. r. 1844., str. 375. v článku nazvaném: „Elementare Lösung einer Aufgabe über das ebene und sphärische Dreieck."

V Grunert-ově „Archiv für Mathematik u. Physik" *Mossbrugger* podal dva důkazy té věty (svaz. 4., 1844., str. 330.) a praví ve článku příslušném, že mu touž větu oznámil Steiner, a *Knopf* (svaz. 11., 1848., str. 444.) vyvrací správnost jednoho z týchž důkazů. Další důkaz podal *Grunert* (svaz. 13., 1849., str. 337.), *Munk* (svaz. 15., 1850., str. 358.), *Nagel* (svaz. 20., 1853., str. 470.). Poslední z těchto mathematiků, známý jakožto výtečný geometr, praví ve svém pojednání, že ta věta hnula mnoha péry, aniž však nalezen byl důkaz, kterýž by slouti mohl ze stanoviska ryzí geometrie elementárním, o nějž, jak podotýká, sám se pokusil. Důkaz *Niegemann-ův* (svaz. 41., 1864., str. 151.) jest sice jednoduchý, ale užito při něm věty trigonometrické. *Reuschle* v programu z roku 1850. vykládá touž větu, a dva důkazy jsou od *Riecka*, které uvádí ve svých „Mathematische Unterhaltungen", 1. sešit, 1867., str. 38., ve 2. sešitě, 1868., str. 48. podává důkaz *Binder-ův.*

Jiná modifikace věty té byla podána tím, že se dokazovala rovnosť půlených dvou úhlů při podmínce, že přímky úhly ty, při podstavě rozpolující, jsou sobě rovny. *Clausen* (Grunertův Archiv, svaz. 20., 1853., str. 459.).

Dále podány důkazy téže věty zobecnělé, že jest totiž trojúhelník rovnoramenným, jsou-li oba úhly při podstavě rozděleny týmže poměrem při supposici rovných transversal. Srovnej Grunert-ův Archiv: *Lange* (svaz. 13., 1849., str. 337. a svaz. 15., 1850, str. 221., kde autor podává také jednoduchý důkaz *Lehmusův*, pak str. 351.); ve svaz. 16., 1851: *Baltzer* *) (str. 201.), *August* (str. 259.), *Zech* (str. 354.); ve svazku 18., 1852: *Schmidt* (str. 357.).

---

*) jehož výtečná „Algébra" převedena byla ředitelem *M. Pokorným* na jazyk český.

V posledním čísle Grunert-ova Archivu (svaz. 70., 1883., str. 223.) dokazuje *Seelhoff*: jsou-li přímky rozpolující dva úhly trojúhelníka sobě rovny, jsou úhly ty při podstavě rovnoramenného trojúhelníka.

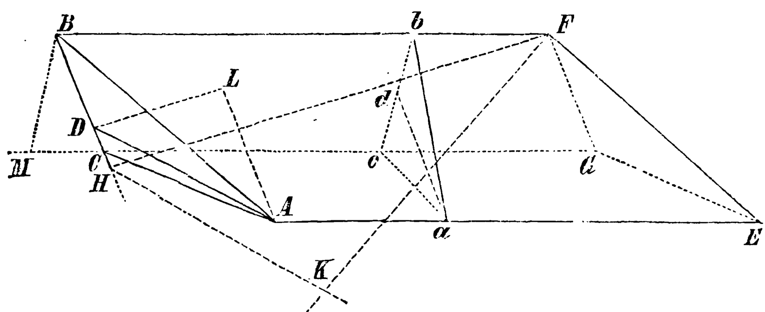
Poznámka k vypočítání obsahu trojbokého hranolu šikmého.

Napsal

prof. dr. **Ignác Axamit.**

Jak známo, vypočítává se obsah šikmého hranolu trojbokého, násobíme-li kolmý řez jeho hranou po bočnou. Professor Jandera, proslulý svou výtečnou methodou ve vyučování geometrii Euklidově, vedl důkaz, že i obsah hranole takového se vypočte, když násobíme podstavu výškou, takto:

Buď $ABCEFG$ šikmý hranol a $\triangle abc$ jeho kolmý řez.



Vedeme-li v tomto trojúhelníku výšku ad, bude obsah hranolu

$$O = \frac{bc \, . \, ad \, . \, BF}{2} \,. \qquad (1)$$

Vedeme-li nyní $BM \parallel bc$ a $FH \perp BC$, bude $\triangle BCM \sim \triangle BFH$. Jest totiž $\sphericalangle BMC = \sphericalangle FHB = R$ a $\sphericalangle BCM = \sphericalangle HBF$. Platí tudíž úměra

$$BC : BM = BF : FH,$$

z níž následuje — uvážíme-li, že $BM = bc$ —

$$BC \, . \, FH = bc \, . \, BF,$$

což když dosadíme do (1), obdržíme