

Hans Heilbronn; Edmund Landau; Peter Scherk

Alle großen ganzen Zahlen lassen sich als Summe von höchstens 71
Primzahlen darstellen

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 3, 117--141

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123182>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1936

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ČÁST MATEMATICKÁ

Alle grossen ganzen Zahlen lassen sich als Summe von höchstens 71 Primzahlen darstellen.

H. Heilbronn in Cambridge (England), E. Landau in Berlin und P. Scherk in Prag.

(Eingegangen am 14. Januar 1936.)

Einleitung.

Kleine lateinische Buchstaben außer e bezeichnen ganze Zahlen, die p Primzahlen, die c positive Weltkonstanten.

Man verdankt Herrn Schnirelmann¹⁾ den Satz:

Jedes $x > 1$ ist als Summe von höchstens c_1 Primzahlen darstellbar.

Oder, was dasselbe besagt:

Jedes $x > c_2$ ist als Summe von höchstens c_2 Primzahlen darstellbar.

Wir nennen Schnirelmannsche Konstante S das kleinste c_2 , zu dem es ein passendes c_2 gibt.

Also: Alle grossen x sind in höchstens S Primzahlen zerlegbar; unendlich viele $x > 1$ sind nicht in $S - 1$ Primzahlen zerlegbar.

Sicher ist

$$S \geq 3;$$

denn für

$$x \equiv 5 \pmod{30}, \quad x > 5$$

ist x durch 5 teilbar, also nicht Primzahl, und x ist nicht $p + p'$; denn x ist ungerade, so daß p oder $p' = 2$ sein müßte, und wegen

¹⁾ *Ob additivnich svoistwach tschisel* [Iswestija Donskowo Polytechnitscheskowo Instituta (Nowotscherkask), Bd. 14 (1930), S. 3—28]; russisch mit französischem Auszug. Vgl. Landaus Darstellung des Schnirelmannschen Beweises: *Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Satz* [Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, Jahrgang 1930, S. 255—276]. Im Folgenden wird unter Satz L x stets Satz x dieser Landauschen Arbeit verstanden.

$$x - 2 \equiv 3 \pmod{30}$$

ist $x - 2$ durch 3 teilbar.

Wie gut läßt sich S nach oben abschätzen?

Dieser Frage ist eine kürzlich erschienene Arbeit von Herrn Romanoff²⁾ gewidmet. Dieser gibt an, Herr Schnirelmann habe $S \leq 100\,000$ bewiesen, was sich zu $S \leq 1104$ verschärfen lasse. Herr Lubelski korrigiert dies in

$$\begin{aligned} S &\leq 800\,000 \text{ (Schnirelmann),} \\ S &\leq 2208 \text{ (Romanoff).} \end{aligned}$$

Er übersieht jedoch, daß gegen Herrn Romanoffs Arbeit (in der er nur eine Reihe störender Druckfehler moniert) Wesentliches einzuwenden ist. Von dem unzureichenden Lemma II ganz abgesehen, ist Herrn Romanoffs Grundlage³⁾ eine angeblich durch leichte Veränderung von Betrachtungen Landaus (*Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. 2) zu folgernde, in ξ und j gleichmäßig gültige asymptotische Formel für

$$\pi(\xi, j, l) = \sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \pmod{j}}} 1,$$

wo $j > 0$, $(j, l) = 1$. Bei deren Herleitung muß Verf. falsch geschlossen haben. Wir können auch heute nicht entscheiden, ob jene Formel richtig oder falsch ist; selbst wenn wir die neueren Untersuchungen der Herren Page und Siegel heranziehen.

Zum Glück ist jene Frage unerheblich. Wir werden sehen, daß statt der Romanoffschen Aussage genügt: der klassische Satz

$$\pi(\xi, j, l) \sim \frac{1}{\varphi(j)} \frac{\xi}{\log \xi}$$

bei festem j , verbunden etwa mit der aus der Brunschen oder der klassischen funktionentheoretischen Methode längst bekannten Formel

$$\pi(\xi, j, l) < \frac{c_4}{j^{0,1}} \cdot \frac{\xi}{\log \xi} \text{ für } \xi \geq 2, \xi \geq j.$$

Wir erwähnen noch die bei Herrn Romanoff⁴⁾ vorkommende Relation

²⁾ *K probleme Goldbacha* [Iswestija Nautschno-issledowatelskogo Instituta matematiki i mehaniki pri Tomskom Gosudarstwenom Universitete im. Kujbyschewa W. W., Bd. 1 (1935), S. 34—38]; russisch mit deutschem Auszug. Vgl. Herrn Lubelskis Rezension im Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete [Bd. 11 (1935), S. 390].

³⁾ S. 36, Z. 4 v. u.

⁴⁾ S. 37, Z. 6—5 v. u.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^2(k)}{k \varphi(k)} = \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} < 1,38,$$

da Herr Lubelski an ihr nicht Anstoß nahm; sie ist schon darum falsch, weil

$$\frac{\mu^2(1)}{1 \cdot \varphi(1)} + \frac{\mu^2(2)}{2 \cdot \varphi(2)} = 1,5 \geq 1,38$$

ist. Tatsächlich ist trivialerweise

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^2(k)}{k \varphi(k)} &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)} \right) = \prod_p \frac{1 - \frac{1}{p^2}}{\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 - \frac{1}{p^3}\right)} \\ &= \frac{\zeta(2) \zeta(3)}{\zeta(6)}. \end{aligned}$$

Die Romanoffsche obere Abschätzung von S würde schon hierdurch zweifelhaft werden; aber es wird uns möglich sein, aus der klassischen Brun-Schnirelmannschen Methode sogar

$$S \leq 71$$

zu beweisen, d. h. den Titel unserer vorliegenden Arbeit zu rechtfertigen.

Wir stellen das Ganze dar, ohne aus der Goldbachliteratur mehr als die Landausche Arbeit vorauszusetzen.

Wir betonen ausdrücklich, daß wir der Romanoffschen Arbeit den Haupthebel zu starker Verkleinerung der alten Abschätzung von S verdanken. Aus

$$0 \leq \mathfrak{A}(y) \leq \mathfrak{B}(y)$$

schliessen wir⁵⁾ nämlich nicht mehr nach dem Schnirelmannschen Paradigma (y läuft über einen endlichen Wertevorrat)

$$\sum_y \mathfrak{A}^2(y) \leq \sum_y \mathfrak{B}^2(y)$$

usf., sondern nach Herrn Romanoff

$$\sum_y \mathfrak{A}^2(y) \leq \sum_y \mathfrak{A}(y) \mathfrak{B}(y)$$

usf.

Den Hauptwitz unserer Arbeit verdanken wir also Herrn Romanoff. Alles andere ist mühevoller Vertiefung in jeden einzelnen Kunstgriff der alten Methode. Herr Romanoff mußte dies unterlassen, weil er weder die Landausche Arbeit noch

⁵⁾ Im Beweis unseres Satzes 5.

eine spätere allgemeine Untersuchung von Herrn Khintchine⁶⁾ über Zahlenmengen kannte.

Fortan gelten folgende Bezeichnungen.

Eine leere Summe bedeutet stets 0, ein leeres Produkt 1.

C ist die Eulersche Konstante.

q ist > 0 , quadratfrei und zu 30 teilerfremd,

$$\psi(q) = \prod_{p|q} (p-2),$$

$$\alpha = \sum_q \frac{1}{\varphi(q) \psi(q)} = \prod_{p \geq 7} \left(1 + \frac{1}{(p-1)(p-2)} \right),$$

$$\beta = \prod_{p \geq 7} \frac{1 - \frac{2}{p}}{\left(1 - \frac{1}{p} \right)^2},$$

$$\varrho = \alpha\beta,$$

also

$$\varrho = \prod_{p \geq 7} \frac{p^2 - 3p + 3}{(p-1)(p-2)} \frac{(p-2)p}{(p-1)^2}$$

$$= \prod_{p \geq 7} \frac{p^3 - 3p^2 + 3p}{(p-1)^3} = \prod_{p \geq 7} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right).$$

Erster Teil.

Der Hauptsatz mit einem Parameter.

Ziel dieses ersten Teiles ist der

Satz 13: *Es sei*

$$\Theta > \log \frac{7}{5} \tag{1}$$

und

⁶⁾ *Zur additiven Zahlentheorie* [Matematitscheskij Sbornik, Bd. 39 (1932), S. 27—34], deutsch mit russischem Auszug. Unser Leser braucht aber diese Arbeit nicht zu kennen; denn wir brauchen aus ihr nur den nicht sehr tiefliegenden Satz:

\mathfrak{N} sei eine Menge natürlicher Zahlen, $N(z)$ die Anzahl der n aus \mathfrak{N} mit $n \leq z$. Es sei $h > 0$ und

$$N(z) > \frac{z}{h} \text{ für alle } z > 0.$$

Dann ist jede natürliche Zahl als Summe von höchstens h Summanden aus \mathfrak{N} darstellbar.

Und für diese Tatsache läßt sich ein Beweis ohne weiteres aus der kürzlich erschienenen Arbeit von Herrn Besicovitch entnehmen: *On the density of the sum of two sequences of integers* [The Journal of the London Mathematical Society, Bd. 10 (1935), S. 246—248].

$$\Theta^2 e^\Theta \leq \frac{4}{e^2} \quad (2)$$

(also
und

$$\Theta < 1$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\Theta^2 e^\Theta)^m m^{2m}}{(2m+1)!}$$

konvergent, wegen

$$\frac{(\Theta^2 e^\Theta)^m m^{2m}}{(2m+1)!} < \frac{\left(\frac{4}{e^2}\right)^m m^{2m}}{2m(2m)!} < \frac{\left(\frac{4}{e^2}\right)^m m^{2m}}{2m} \frac{e^{2m}}{(2m)^{2m} \sqrt{2\pi} \sqrt{2m}} \\ = \frac{1}{4\sqrt{\pi} m^{\frac{3}{2}}}.$$

Es werde

$$\sigma = \sigma(\Theta) = 1 + \Theta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\Theta^2 e^\Theta)^m m^{2m}}{(2m+1)!}$$

gesetzt, ferner

$$h = h(\Theta) = \left[\frac{16}{3} \Theta \sigma e^{-2\Theta} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2} \right] + 1.$$

Es sei die Goldbachsche Vermutung bis $30h + 1$ wahr, d. h. jedes gerade x mit $4 \leq x \leq 30h + 1$ Summe von 2 Primzahlen, also jedes y mit $2 \leq y \leq 30h + 1$ Summe von höchstens 3 Primzahlen.

Dann ist die Schnirelmannsche Konstante

$$S \leq 2h + 3.$$

Im zweiten Teil, der nur numerische Rechnungen enthält, wird ein Θ mit (1) und (2) angegeben, für das

$$\frac{16}{3} \Theta \sigma e^{-2\Theta} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2} < 34$$

ist. Alsdann ist

$$h \leq 34,$$

also, da die Goldbachsche Vermutung bekanntlich bis 1021 wahr ist,

$$S \leq 71.$$

Definitionen: Für $x > 0$ sei

$$A(x) = \sum_{p+p'=x} 1;$$

für $\xi \geq 0, j > 0$ sei

$$B(\xi, j) = \sum_{\substack{1 \leq y \leq \xi \\ y \equiv 0 \pmod{j}}} A(y) \left(= \sum_{\substack{p+p' \leq \xi \\ p+p' \equiv 0 \pmod{j}}} 1 \right),$$

$$C(\xi, j) = \sum_{\substack{1 \leq y \leq \xi \\ y \equiv 0 \pmod{j}}} A(y) y$$

und für jedes l

$$\pi(\xi, j, l) = \sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \pmod{j}}} 1.$$

Satz 1: 1. Bei festen j, l mit $(j, l) = 1$ ist

$$\pi(\xi, j, l) \sim \frac{1}{\varphi(j)} \frac{\xi}{\log \xi}.$$

2. Für $\xi \geq 2, \xi \geq j$ ist

$$\pi(\xi, j, l) < \frac{c_5}{j^{0,1}} \frac{\xi}{\log \xi}.$$

Beweis: Beide Behauptungen sind bekanntlich wahr.

1. Die erste ist klassisch.

2. Die zweite ergibt sich z. B. nach Herrn Romanoff⁷⁾ aus der Brun-Schnirelmanschen Methode folgendermassen.

Für $u > 0$ sei

$$f(u) = \prod_{p|u} \left(1 + \frac{1}{p} \right) = \sum_{r|u} \frac{1}{r},$$

wo r die positiven quadratfreien Zahlen durchläuft. Es sei $g(u, \xi)$ die Lösungszahl von

$$u = p - p', \quad p \leq \xi.$$

Nach Satz L 23 ist für $x \geq 2, 1 \leq u \leq x$

$$g(u, x) < c_6 \frac{x}{\log^2 x} f(u).$$

Für $\xi \geq 2, 1 \leq u \leq \xi$ ist also

$$g(u, \xi) = g(u, [\xi]) < c_7 \frac{\xi}{\log^2 \xi} f(u).$$

Nun ist für $\eta > 0$

$$\sum_{1 \leq v \leq \eta} f(v) = \sum_{1 \leq v \leq \eta} \sum_{r|v} \frac{1}{r} = \sum_{r \leq \eta} \frac{1}{r} \left[\frac{\eta}{r} \right] < \eta \sum_r \frac{1}{r^2} < c_8 \eta \quad (3)$$

und für $v > 0, w > 0$ offenbar

⁷⁾ Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie [Mathematische Annalen, Bd. 109 (1934), S. 668–678], S. 675–676.

$$f(vw) = \prod_{p|vw} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \prod_{p|v} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \prod_{p|w} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = f(v) f(w); \quad (4)$$

ferner ist bekanntlich

$$f(j) \leq \prod_{p|j} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{j}{\varphi(j)} < c_9 j^{0,8}. \quad (5)$$

21. Im Falle

$$\pi(\xi, j, l) \leq 1$$

ist trivialerweise

$$\pi(\xi, j, l) < c_{10} \frac{\xi^{0,9}}{\log \xi} \leq \frac{c_{10}}{j^{0,1}} \frac{\xi}{\log \xi}.$$

22. Im Falle

$$\pi(\xi, j, l) \geq 2$$

ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \pi^2(\xi, j, l) &\leq \frac{1}{2} (\pi^2(\xi, j, l) - \pi(\xi, j, l)) \\ &= \text{Lösungszahl von } p \equiv p' \equiv l \pmod{j}, \quad p' < p \leq \xi \\ &\leq \text{Lösungszahl von } p - p' \equiv 0 \pmod{j}, \quad p' < p \leq \xi \\ &= \sum_{\substack{1 \leq u \leq \xi \\ u \equiv 0 \pmod{j}}} g(u, \xi) < c_7 \frac{\xi}{\log^2 \xi} \sum_{\substack{1 \leq u \leq \xi \\ u \equiv 0 \pmod{j}}} f(u). \end{aligned} \quad (6)$$

Hierin ist nach (4), (3) und (5)

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq u \leq \xi \\ u \equiv 0 \pmod{j}}} f(u) &= \sum_{1 \leq v \leq \frac{\xi}{j}} f(vj) \leq f(j) \sum_{1 \leq v \leq \frac{\xi}{j}} f(v) \\ &< c_9 j^{0,8} c_8 \frac{\xi}{j} = c_{11} \frac{\xi}{j^{0,2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Aus (6) und (7) folgt

$$\begin{aligned} \pi^2(\xi, j, l) &< 4c_7 \frac{\xi}{\log^2 \xi} c_{11} \frac{\xi}{j^{0,2}} = \frac{c_{12}}{j^{0,2}} \frac{\xi^2}{\log^2 \xi}, \\ \pi(\xi, j, l) &< \frac{c_{12}}{j^{0,1}} \frac{\xi}{\log \xi}. \end{aligned}$$

Satz 2: 1. Bei festem j ist

$$B(\xi, j) \sim \frac{1}{2\varphi(j)} \frac{\xi^2}{\log^2 \xi}.$$

2. Für $\xi \geq 2$ ist

$$B(\xi, j) < \frac{c_{13}}{j^{0,1}} \frac{\xi^2}{\log^2 \xi}.$$

Beweis: Alle Kongruenzen sind mod j gemeint.

1. Für $(a, j) > 1$ ist

$$\sum_{\substack{p+p' \leq \xi \\ p \equiv -p' \equiv a}} 1 \leq 1.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} B(\xi, j) &= \sum_{a=1}^j \sum_{\substack{p+p' \leq \xi \\ p \equiv -p' \equiv a}} 1 \\ &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a, j)=1}}^j \sum_{\substack{p+p' \leq \xi \\ p \equiv -p' \equiv a}} 1 + O(1). \end{aligned} \quad (8)$$

Nun ist für $(a, j) = 1$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\substack{p+p' \leq \xi \\ p \equiv -p' \equiv a}} 1 &= \sum_{\substack{p \leq \frac{1}{2}\xi \\ p \equiv a}} \pi(\xi - p, j, -a) \\ + \sum_{\substack{p' \leq \frac{1}{2}\xi \\ p' \equiv -a}} \pi(\xi - p', j, a) &- \pi\left(\frac{1}{2}\xi, j, -a\right) \pi\left(\frac{1}{2}\xi, j, a\right). \end{aligned} \right\} (9)$$

In der ersten Summe rechts ist gleichmäßig

$$\log(\xi - p) \sim \log \xi;$$

nach Satz 1, 1. ist also

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq \frac{1}{2}\xi \\ p \equiv a}} \pi(\xi - p, j, -a) &\sim \frac{1}{\varphi(j)} \frac{1}{\log \xi} \sum_{\substack{p \leq \frac{1}{2}\xi \\ p \equiv a}} (\xi - p) \\ &\sim \frac{1}{\varphi(j)} \frac{1}{\log \xi} \frac{1}{\varphi(j)} \int_2^{\frac{1}{2}\xi} \frac{\xi - \eta}{\log \eta} d\eta \\ &= \frac{1}{\varphi^2(j)} \frac{1}{\log \xi} \left(\xi \int_2^{\frac{1}{2}\xi} \frac{d\eta}{\log \eta} - \int_2^{\frac{1}{2}\xi} \frac{\eta}{\log \eta} d\eta \right) \\ &\sim \frac{1}{\varphi^2(j)} \frac{1}{\log \xi} \left(\xi \frac{1}{2} \frac{1}{\log \xi} - \frac{(\frac{1}{2}\xi)^2}{2 \log \xi} \right) = \frac{3}{8 \varphi^2(j)} \frac{\xi^2}{\log^2 \xi}. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist also

$$\sum_{\substack{p' \leq \frac{1}{2}\xi \\ p' \equiv -a}} \pi(\xi - p', j, a) \sim \frac{3}{8 \varphi^2(j)} \frac{\xi^2}{\log^2 \xi}.$$

Ferner ist

$$\pi(\tfrac{1}{2}\xi, j, -a) \pi(\tfrac{1}{2}\xi, j, a) \sim \left(\frac{1}{\varphi(j)} \frac{\tfrac{1}{2}\xi}{\log \xi} \right)^2 = \frac{1}{4\varphi^2(j)} \frac{\xi^2}{\log^2 \xi}.$$

Wegen

$$\frac{3}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ist also nach (9)

$$\sum_{\substack{p+p' \leq \xi \\ p \equiv -p' \equiv a}} 1 \sim \frac{1}{2\varphi^2(j)} \frac{\xi^2}{\log^2 \xi},$$

und (8) gibt die Behauptung.

2. Falls $\xi < j$, ist

$$B(\xi, j) = 0.$$

Falls $\xi \geq j$, ist nach Satz 1, 2.

$$\begin{aligned} B(\xi, j) &\leq \sum_{p \leq \xi} \pi(\xi, j, -p) \leq \sum_{p \leq \xi} \frac{c_5}{j^{0,1}} \frac{\xi}{\log \xi} \\ &< \frac{c_{13}}{j^{0,1}} \frac{\xi^2}{\log^2 \xi}. \end{aligned}$$

Satz 3: 1. Bei festem j ist

$$C(\xi, j) \sim \frac{1}{3\varphi(j)} \frac{\xi^3}{\log^2 \xi}.$$

2. Für $\xi \geq 2$ ist

$$C(\xi, j) < \frac{c_{13}}{j^{0,1}} \frac{\xi^3}{\log^2 \xi}.$$

Beweis: 1. O. B. d. A. sei ξ ganz. Aus Satz 2, 1. folgt

$$\begin{aligned} C(\xi, j) &= \sum_{y=1}^{\xi} (B(y, j) - B(y-1, j)) y \\ &= - \sum_{y=1}^{\xi-1} B(y, j) + \xi B(\xi, j) \\ &\sim - \frac{1}{2\varphi(j)} \int_2^{\xi} \frac{\eta^2 d\eta}{\log^2 \eta} + \frac{1}{2\varphi(j)} \frac{\xi^3}{\log^2 \xi} \\ &\sim \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\varphi(j)} \frac{\xi^3}{\log^2 \xi} = \frac{1}{3\varphi(j)} \frac{\xi^3}{\log^2 \xi}. \end{aligned}$$

2. Aus Satz 2, 2. folgt

$$C(\xi, j) \leq \xi B(\xi, j) < \frac{c_{13}}{j^{0,1}} \frac{\xi^3}{\log^2 \xi}.$$

Satz 4:

$$\sum_{\substack{\xi \\ \log \xi < \nu \leq \xi \\ \nu \equiv 0 \pmod{30}}} A(y) \frac{y}{\log^2 y} \sum_{q|y} \frac{1}{\psi(q)} \sim \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \alpha \frac{\xi^3}{\log^4 \xi}.$$

Beweis: Da gleichmäßig

$$\log y \sim \log \xi,$$

genügt es,

$$\frac{\log^2 \xi}{\xi^3} \sum_{\substack{\xi \\ \log \xi < \nu \leq \xi \\ \nu \equiv 0 \pmod{30}}} A(y) y \sum_{q|y} \frac{1}{\psi(q)} \rightarrow \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \alpha \quad (10)$$

zu zeigen.

Für $\xi \geq e$ werde

$$\Delta(\xi, q) = \frac{\log^2 \xi}{\xi^3} \frac{1}{\psi(q)} \left(C(\xi, 30q) - C\left(\frac{\xi}{\log \xi}, 30q\right) \right)$$

gesetzt. Dann hat die linke Seite von (10) den Wert

$$\frac{\log^2 \xi}{\xi^3} \sum_q \frac{1}{\psi(q)} \sum_{\substack{\xi \\ \log \xi < \nu \leq \xi \\ \nu \equiv 0 \pmod{30q}}} A(y) y = \sum_q \Delta(\xi, q). \quad (11)$$

Nach Satz 3, 2. ist

$$0 \leq \Delta(\xi, q) \leq \frac{\log^2 \xi}{\xi^3} \frac{1}{\psi(q)} C(\xi, 30q) < \frac{\log^2 \xi}{\xi^3} \frac{1}{\psi(q)} \frac{c_{13}}{q^{0,1}} \frac{\xi^3}{\log^2 \xi} = \frac{c_{13}}{q^{0,1} \psi(q)}. \quad (12)$$

Die Reihe

$$\sum_q \frac{1}{q^{0,1} \psi(q)} = \prod_{p \geq 7} \left(1 + \frac{1}{p^{0,1} (p-2)} \right)$$

konvergiert; wegen (12) konvergiert also die Reihe auf der rechten Seite von (11) gleichmäßig.

Nach Satz 3, 1. ist bei festem q

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Delta(\xi, q) = \frac{1}{\psi(q) \cdot 3\varphi(30q)} = \frac{1}{24\varphi(q) \psi(q)}.$$

Die linke Seite von (11) strebt also bei $\xi \rightarrow \infty$ gegen

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \sum_q \frac{1}{\varphi(q) \psi(q)} = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \alpha.$$

Satz 5: Falls

$$\overline{\lim}_{\substack{x=\infty \\ x \equiv 0 \pmod{30}}} \frac{A(x)}{\log^2 x \sum_{q|x} \frac{1}{\psi(q)}} \leq A \quad (13)$$

gilt, so ist

$$\overline{\lim}_{\xi=\infty} \frac{\log^4 \xi}{\xi^3} \sum_{\substack{1 \leq y \leq \xi \\ y \equiv 0 \pmod{30}}} A^2(y) \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \alpha A. \quad (14)$$

Beweis: B sei irgend eine Zahl $> A$. Dann ist zuletzt

$$A(y) < B \frac{y}{\log^2 y} \sum_{q|y} \frac{1}{\psi(q)} \text{ für } 30|y.$$

Wegen

$$A(y) \leq \pi(y) = O\left(\frac{y}{\log y}\right)$$

ist daher

$$\sum_{\substack{1 \leq y \leq \xi \\ y \equiv 0 \pmod{30}}} A^2(y) \leq O \sum_{2 \leq y \leq \frac{\xi}{\log \xi}} \frac{y^2}{\log^2 y} + B \sum_{\substack{\frac{\xi}{\log \xi} < y \leq \xi \\ y \equiv 0 \pmod{30}}} A(y) \frac{y}{\log^2 y} \sum_{q|y} \frac{1}{\psi(q)}.$$

Das erste Glied rechts ist

$$O\left(\left(\frac{\xi}{\log \xi}\right)^3\right) = O\left(\frac{\xi^3}{\log^5 \xi}\right).$$

Nach Satz 4 ist also die linke Seite von (14) höchstens gleich $B \frac{1}{4^{\frac{1}{4}}} \alpha$, und $B \rightarrow A$ gibt die Behauptung.

Satz 6: Es sei \mathfrak{M} eine Menge natürlicher Zahlen m und $M(x)$ die Anzahl der $m \leq x$. Es sei

$$h > 0, \quad \lim_{x=\infty} \frac{M(x)}{x} > \frac{1}{h}. \quad (15)$$

Dann sind alle grossen u als Summe von h Zahlen m und höchstens $h - 1$ Einsen darstellbar.

Vorbemerkung: Wenn \mathfrak{M} die Menge der m mit

$$30m = p + p'$$

ist und (15) gilt, so ist also jedes grosse

$$u = \sum_{i=1}^h m_i + v, \quad 0 \leq v \leq h - 1,$$

also für jedes j mit $0 \leq j \leq 29$ jedes grosse

$$30u + j = \sum_{i=1}^h (p_i + p'_i) + 30v + j,$$

also jedes grosse

$$w - 2 = \sum_{i=1}^h (p_i + p'_i) + z, \quad 0 \leq z \leq 30h - 1,$$

also jedes grosse

$$w = \sum_{i=1}^h (p_i + p'_i) + t, \quad 2 \leq t \leq 30h + 1.$$

Falls also (15) gilt und die Goldbachsche Vermutung bis $30h + 1$ wahr ist, so ist

$$S \leq 2h + 3.$$

Beweis: Es gibt ein $y \geq 0$ mit

$$\begin{cases} M(y) \leq \frac{y}{h}, \\ M(x) > \frac{x}{h} \text{ für } x > y. \end{cases}$$

$y + 1$ ist also ein m , und es ist

$$M(x) - M(y) > \frac{x - y}{h} \text{ für } x > y.$$

Der Khintchinesche, in Fußnote⁶⁾ zitierte Satz, auf die Menge der $m - y$ mit $m > y$ angewendet, ergibt:

Jedes $t > 0$ ist von der Form

$$t = \sum_{i=1}^s (m_i - y), \quad 1 \leq s \leq h;$$

jedes $u > hy + h - 1$ ist also von der Form

$$\begin{aligned} u &= (u - hy - h + 1) + hy + h - 1 = \sum_{i=1}^s (m_i - y) + hy + h - 1 \\ &= \sum_{i=1}^s m_i + \sum_{i=s+1}^h (y + 1) + s - 1 = \sum_{i=1}^h m_i + v, \quad 0 \leq v \leq h - 1. \end{aligned}$$

Satz 7: Es sei \mathfrak{M} die Menge der m mit

$$30m = p + p'.$$

A erfülle (13). Dann gilt (15) mit

$$h = \left[\frac{1}{3} A\alpha \right] + 1.$$

Vorbemerkung: Wenn A (13) erfüllt und die Goldbachsche Vermutung bis $30 \left[\frac{1}{4} A \alpha \right] + 31$ wahr ist, so ist also nach der Vorbemerkung zu Satz 6

$$S \leq 2 \left[\frac{1}{4} A \alpha \right] + 5.$$

Beweis: Es sei \mathfrak{M}' die Menge der durch 30 teilbaren $p + p'$, $M'(x)$ die Anzahl dieser Zahlen $\leq x$. Dann ist

$$M'(30x) = M(x).$$

Es ist

$$\left(\sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv 0 \pmod{30}}}^{30x} A(y) \right)^2 \leq M'(30x) \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv 0 \pmod{30}}}^{30x} A^2(y). \quad (16)$$

Nach Satz 2, 1. mit $j = 30$ ist

$$\sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv 0 \pmod{30}}}^{30x} A(y) = B(30x, 30) \sim \frac{1}{2\varphi(30)} \frac{(30x)^2}{\log^2 x} = \frac{225}{4} \frac{x^2}{\log^2 x}.$$

Nach (16) und Satz 5 ist daher

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{M'(30x)}{x} \\ &\geq \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^4 x}{x^4} \left(\sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv 0 \pmod{30}}}^{30x} A(y) \right)^2}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^4 x}{x^3} \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv 0 \pmod{30}}}^{30x} A^2(y)} \\ &\geq \frac{\frac{225^2}{4^2}}{\frac{1}{2^4} A \cdot 30^3} = \frac{1}{\frac{1}{4} A \alpha} > \frac{1}{\left[\frac{1}{4} A \alpha \right] + 1}. \end{aligned}$$

*

Wir werden nun für jedes Θ mit (1), (2) die Relation (13) mit

$$A = 15\sigma e^{-2\Theta} \frac{1}{(1 - e^{-1\Theta})^2} \beta$$

beweisen. Dies liefert nach Satz 7 unmittelbar den zu Beginn dieses ersten Teils ausgesprochenen Satz 13.

Satz 8: Es sei $m > 0$, alle Summationsbuchstaben $j_i \geq 0$,

$$T = \sum_{\substack{m \\ \sum_1^m j_l = 2m+1 \\ \sum_1^r j_l \leq 2r \text{ für } 1 \leq r < m}} \frac{(2m+1)!}{j_1! j_2! \dots j_m!}.$$

Dann ist

$$T \leq m^{2m}.$$

Beweis: Man definiere j_l für alle l mit der Periode m .

Für $1 \leq k \leq m$ entstehe T_k aus T , indem jedes j_l durch j_{l+k-1} ersetzt wird. T_1 ist also T ; T_k unterscheidet sich von T nur in der Bezeichnung der Summationsbuchstaben (da der alte Summand in j_1, \dots, j_m symmetrisch war und j_k, \dots, j_{m+k-1} eine zyklische Permutation dieser Zahlen ist); T_k hat also denselben Wert wie T .

Es genügt zu zeigen

$$\sum_{k=1}^m T_k \leq \sum_{\substack{m \\ \sum_1^m j_l = 2m+1}} \frac{(2m+1)!}{j_1! j_2! \dots j_m!}; \quad (17)$$

denn die linke Seite ist $= mT$, die rechte

$$= \left(\sum_{l=1}^m 1 \right)^{2m+1} = m^{2m+1}.$$

(17) wird nun folgendermassen bewiesen. Jedes System j_1, \dots, j_m , das in einem T_k vorkommt, kommt auch rechts vor. Es langt also zu zeigen, daß jedes System j_1, \dots, j_m , das in einem T_{k_0} vorkommt, in keinem T_k mit $k \neq k_0$ vorkommt. Aus Symmetriegründen darf man annehmen, daß j_1, \dots, j_m in T_1 vorkommt, und hat zu zeigen, daß j_1, \dots, j_m für jedes k mit $2 \leq k \leq m$ nicht in T_k vorkommt. In der Tat ist

$$\sum_1^{k-1} j_i \leq 2(k-1),$$

wegen

$$\sum_1^m j_i = 2m+1 > 2m.$$

also

$$\sum_k^m j_i > 2(m-k+1).$$

Käme das System j_1, \dots, j_m in T_k vor, so wäre jedoch

$$\sum_k^m j_i \leq 2(m - k + 1).$$

Satz 9: In den Bezeichnungen von Satz L2 ist für $0 \leq m \leq t$, $0 \leq i \leq 2m$

$$\varrho_i^{(m)} = \sum_{\substack{\sum_1^m j_l = i \\ \sum_1^r j_l \leq 2r \text{ für } 1 \leq r < m}} \sigma_{j_1}^{(1)} \sigma_{j_2}^{(2)} \dots \sigma_{j_m}^{(m)}, \quad (18)$$

wo die $j_l \geq 0$ sind und die rechte Seite 1 im Falle $m = 0$ bedeutet.

Beweis: 1. Für $m = 0$ ist

$$i = 0,$$

$$\varrho_i^{(m)} = \varrho_0^{(0)} = 1.$$

2. Für $m = 1$ ist

$$0 \leq i \leq 2;$$

21. für $i = 0$ ist die linke Seite der Behauptung 1, die rechte

$$\sigma_0^{(1)} = 1;$$

22. für $i = 1$ ist die linke Seite

$$\varrho_1^{(1)} = \sum_{k_0 \geq s > k_1} \gamma_s = \sigma_1^{(1)} = \text{rechte Seite};$$

23. für $i = 2$ ist die linke Seite

$$\varrho_2^{(1)} = \sum_{k_0 \geq s_1 > s_2 > k_1} \gamma_{s_1} \gamma_{s_2} = \sigma_2^{(1)} = \text{rechte Seite}.$$

3. Der Schluß von $m - 1$ auf m für $m \geq 2$ verläuft folgendermassen.

Nach Formel (9) des Satzes L2 ist

$$\varrho_i^{(m)} = \sum_{n=0}^i \varrho_n^{(m-1)} \sigma_{i-n}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\text{Min}(i, 2(m-1))} \varrho_n^{(m-1)} \sigma_{i-n}^{(m)};$$

denn für $i \geq n > 2(m - 1)$ ist wegen $n \leq i \leq 2m \leq 2t$ nach einer im Wortlaut des Satzes L2 gemachten Bemerkung

$$\varrho_n^{(m-1)} = 0.$$

Nach der mit n statt i , $m - 1$ statt m anzuwendenden Formel (18) (beachte $n \leq 2(m - 1)$) ist also

$$\rho_i^{(m)} = \sum_{n=0}^{\text{Min}(i, 2(m-1))} \sigma_{i-n}^{(m)} \sum_{\substack{j_1=1 \\ \vdots \\ j_{m-1}=1}}^{m-1} \sigma_{j_1}^{(1)} \dots \sigma_{j_{m-1}}^{(m-1)},$$

$$\sum_{l=1}^r j_l \leq 2r \text{ für } 1 \leq r < m-1$$

folglich, wenn

$$i - n = j_m$$

gesetzt wird (es ist $j_m \geq 0$),

$$\rho_i^{(m)} = \sum_{j_1, \dots, j_m} \sigma_{j_1}^{(1)} \dots \sigma_{j_m}^{(m)},$$

über die Wertsysteme $j_l \geq 0$ erstreckt, für die

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^m j_l = i, \end{array} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^r j_l \leq 2r \text{ für } 1 \leq r < m-1, \end{array} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i - 2(m-1) \leq j_m. \end{array} \right. \quad (21)$$

Und dies bedeutet genau

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^m j_l = i, \\ \sum_1^r j_l \leq 2r \text{ für } 1 \leq r < m; \end{array} \right.$$

denn aus (19), (20), (21) folgt

$$\sum_1^{m-1} j_l = i - j_m \leq 2(m-1),$$

und aus (19), (20) nebst

$$\sum_1^{m-1} j_l \leq 2(m-1)$$

folgt

$$j_m = i - \sum_1^{m-1} j_l \geq i - 2(m-1).$$

Satz 10: Es mögen $t, k_0, \dots, k_t, \rho^{(t)}$ die Bedeutung aus Satz L2 haben; Θ erfülle (1) und (2); $\sigma = \sigma(\Theta)$ sei wie in Satz 13 erklärt. Es sei

und

$$0 < \gamma_s < 1 \text{ für } 1 \leq s \leq k_0$$

$$L_m = \prod_{k_m < s \leq k_{m-1}} (1 - \gamma_s) \geq e^{-\Theta} \text{ für } 1 \leq m \leq t. \quad (22)$$

Dann ist

$$|\varrho^{(t)}| < \sigma \prod_{i=1}^t L_i.$$

Beweis: Für $1 \leq m \leq t$ ist nach (22)

$$\sigma_1^{(m)} = \sum_{k_m < s \leq k_{m-1}} \gamma_s < -\log L_m \leq \Theta < 1;$$

nach Formel (5) des Satzes L1 ist also für $u \geq 1$

$$\sigma_u^{(m)} \leq \frac{\sigma_1^{(m)}}{u} \sigma_{u-1}^{(m)} \leq \sigma_{u-1}^{(m)},$$

$$\Theta > \sigma_1^{(m)} \geq \sigma_2^{(m)} \geq \dots \text{ ad inf.}; \quad (23)$$

nach Formel (6) des Satzes L1 ist für $k \geq 1, j \geq 0$

$$\sigma_j^{(k)} \leq \frac{(\sigma_1^{(k)})^j}{j!} \leq \frac{\Theta^j}{j!}. \quad (24)$$

Aus Formel (10) des Satzes L2 und (23) folgt

$$\begin{aligned} |\varrho^{(m)} - \varrho^{(m-1)} L_m| &= \left| \sum_{n=0}^{2m-2} (-1)^n \varrho_n^{(m-1)} \sum_{u=2m-n+1}^{\infty} (-1)^u \sigma_u^{(m)} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{2m-2} \varrho_n^{(m-1)} \sigma_{2m-n+1}^{(m)}. \end{aligned}$$

Nach Satz 9 (mit n statt i , $m-1$ statt m) ist also

$$|\varrho^{(m)} - \varrho^{(m-1)} L_m| \leq \sum_{n=0}^{2m-2} \sigma_{2m-n+1}^{(m)} \sum_{\substack{j_1=1 \\ \vdots \\ j_r=1 \\ \sum_{l=1}^r j_l \leq 2r \text{ für } 1 \leq r < m-1}} \sigma_{j_1}^{(1)} \dots \sigma_{j_{m-1}}^{(m-1)}.$$

Wird

$$2m - n + 1 = j_m$$

eingeführt, so ist daher

$$\begin{aligned}
|\varrho^{(m)} - \varrho^{(m-1)} L_m| &\leq \sum_{\substack{j_1=2m+1 \\ \sum_{l=1}^r j_l \leq 2r \text{ für } 1 \leq r < m-1 \\ j_m \geq 3}} \sigma_{j_1}^{(1)} \dots \sigma_{j_m}^{(m)} \\
&\leq \sum_{\substack{j_1=2m+1 \\ \sum_{l=1}^r j_l \leq 2r \text{ für } 1 \leq r < m}} \sigma_{j_1}^{(1)} \dots \sigma_{j_m}^{(m)};
\end{aligned}$$

denn

$$\sum_1^{m-1} j_i = 2m + 1 - j_m \leq 2(m-1).$$

Nach Satz 8 und (24) ist also

$$\begin{aligned}
|\varrho^{(m)} - \varrho^{(m-1)} L_m| &\leq \sum_{\substack{j_1=2m+1 \\ \sum_{l=1}^r j_l \leq 2r \text{ für } 1 \leq r < m}} \frac{\Theta^{j_1} \dots \Theta^{j_m}}{j_1! \dots j_m!} \\
&= \frac{\Theta^{2m+1}}{(2m+1)!} T \leq \frac{\Theta^{2m+1}}{(2m+1)!} m^{2m},
\end{aligned}$$

also nach (22)

$$\left| \frac{\varrho^{(m)}}{\prod_1^m L_i} - \frac{\varrho^{(m-1)}}{\prod_1^{m-1} L_i} \right| \leq e^{m\Theta} \frac{\Theta^{2m+1}}{(2m+1)!} m^{2m}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\varrho^{(t)}}{\prod_1^t L_i} - 1 \right| &= \left| \sum_{m=1}^t \left(\frac{\varrho^{(m)}}{\prod_1^m L_i} - \frac{\varrho^{(m-1)}}{\prod_1^{m-1} L_i} \right) \right| \\
&< \sum_{m=1}^{\infty} e^{m\Theta} \frac{\Theta^{2m+1}}{(2m+1)!} m^{2m} = \sigma - 1, \\
\frac{|\varrho^{(t)}|}{\prod_1^t L_i} &< \sigma, \\
|\varrho^{(t)}| &< \sigma \prod_{i=1}^t L_i.
\end{aligned}$$

Bitte nunmehr den § 2 der Landauschen Arbeit bis einschl. Satz L7 zu lesen. Man beachte jetzt, daß die Beweismethode des Satzes L8 den entsprechenden Wortlaut auch liefert, wenn alle ersten Argumente von F (d. h. alle Argumente, die nicht hinter einem Semikolon stehen) durch ihr 30 faches ersetzt werden.

A fortiori ist also, wenn alle $p_s \geq 7$ sind,

$$F(30; p_1, \dots, p_k) \leq F(30) + \sum_{i=1}^{2t} (-1)^i \sum_{r_1, \dots, r_i} v_{r_1} \dots v_{r_i} F(30p_{r_1} \dots p_{r_i}),$$

wo die r_i den Bedingungen (15) aus Satz L8 unterworfen sind.

Die Beweismethode von Satz L9 liefert daher

$$F(30; p_1, \dots, p_k) < \frac{y\tau}{30} + 2 \prod_{m=0}^{t-1} (2k_m)^2, \quad (25)$$

wo τ wie in Satz L9 erklärt ist.

Satz 11: Wenn

$$p_1 < \dots < p_k$$

die p mit

$$7 \leq p \leq \sqrt{y}$$

sind, so ist (bei jedem a)

$$\overline{\lim}_{\substack{y=\infty \\ y \equiv 0 \pmod{30}}} \frac{F(30; p_1, \dots, p_k)}{\log^2 y \sum_{q|y} \frac{1}{\psi(q)}} \leq \frac{1}{8} \sigma e^{-2C} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2} \beta.$$

Beweis: Bekanntlich ist

$$\prod_{p \leq \xi} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-C}}{\log \xi},$$

also

$$\prod_{7 \leq p \leq \xi} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{30}{\varphi(30)} \frac{e^{-C}}{\log \xi} = \frac{1}{4} \frac{e^{-C}}{\log \xi}. \quad (26)$$

Offenbar genügt es, zu jedem

$$\delta > \frac{1}{8} \sigma e^{-2C} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2}$$

eine nur von Θ und δ abhängige positive Zahl $\gamma \leq \frac{1}{2}$ so anzugeben, dass, wenn

$$p_1 < \dots < p_k$$

die p mit

$$7 \leq p \leq y^\gamma$$

sind,

$$\overline{\lim}_{\substack{\gamma=\infty \\ \gamma \equiv 0 \pmod{30}}} \frac{F(30; p_1, \dots, p_k)}{\frac{y}{\log^2 y} \sum_{q|y} \frac{1}{\psi(q)}} \leq \delta\beta$$

ist. (Denn bei steigendem γ steigt $F(30; p_1, \dots, p_k)$ nicht, und die linke Seite der Behauptung des Satzes ergibt sich $\leq \delta\beta$, also \leq rechte Seite der Behauptung.)

Man wähle γ mit

$$0 < \gamma < \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta}),$$

$$\frac{1}{3} \frac{5}{2} \sigma e^{-2C} \frac{1}{\gamma^2} < \delta$$

und alsdann eine von Θ , δ und γ abhängige Zahl ε mit

$$\begin{aligned} \varepsilon &> 1, \\ \varepsilon e^{-\frac{1}{2}\Theta} &< 1, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\varepsilon \frac{1}{3} \frac{5}{2} \sigma e^{-2C} \frac{1}{\gamma^2} < \delta, \quad (28)$$

$$\zeta = \frac{\varepsilon^2 \gamma}{1 - \varepsilon e^{-\frac{1}{2}\Theta}} + \varepsilon - 1 < \frac{1}{2}. \quad (29)$$

Es sei

$$y \equiv 0 \pmod{30}$$

und alsbald

$$y \geq 7^{\frac{1}{\gamma}},$$

also

$$k > 0.$$

Wir setzen für $1 \leq i \leq k$

$$\gamma_i = \frac{v_i}{p_i}.$$

Dann ist nach (1)

$$1 - \gamma_i \geq 1 - \frac{2}{p_i} \geq \frac{5}{7} > e^{-\Theta}.$$

Nun kommt das Analogon zur alten, aus dem Beweis von Satz L 10 geläufigen Konstruktion der (jetzt von y und Θ abhängigen) Zahlen

$$t > 0, k_0, \dots, k_t$$

mit

$$\begin{cases} k = k_0 > k_1 > \dots > k_{t-1} > k_t = 0, \\ L_i = \prod_{k_i < s \leq k_{i-1}} (1 - \gamma_s) \text{ gerade noch } \geq e^{-\Theta}, \end{cases}$$

wo k_1, k_2, \dots sukzessiv je minimal gewählt sind. Wegen

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2}{p} = 0$$

ist hierbei

$$L_i < \varepsilon e^{-\Theta} \text{ für } 1 \leq i \leq t - w_1,$$

wo w_1 (desgl. nachher w_2 und w_3) positiv ist und nur von Θ , δ , γ und ε abhängt.

Offenbar ist

$$\tau = \varrho^{(t)},$$

also nach Satz 10

$$|\tau| < \sigma \prod_{i=1}^t L_i,$$

folglich nach (25)

$$F(30; p_1, \dots, p_k) < y^{\frac{1}{30}} \sigma \prod_{i=1}^t L_i + 2 \prod_{m=0}^{t-1} (2k_m)^2. \quad (30)$$

Wird

$$\lambda = \lambda(y) = \prod_{s=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$$

gesetzt, so ist nach (26)

$$\lambda \sim \frac{1}{4} \frac{e^{-C}}{\log(y^\gamma)} = \frac{1}{4} \frac{e^{-C}}{\gamma \log y}. \quad (31)$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^t L_i &= \prod_{s=1}^k \left(1 - \frac{v_s}{p_s}\right) \\ &= \prod_{s=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)^2 \prod_{s=1}^k \frac{1 - \frac{2}{p_s}}{\left(1 - \frac{1}{p_s}\right)^2} \prod_{s=1}^k \frac{1 - \frac{1}{p_s}}{1 - \frac{2}{p_s}} \\ &\leq \lambda^2 \prod_{s=1}^k \frac{1 - \frac{2}{p_s}}{\left(1 - \frac{1}{p_s}\right)^2} \prod_{\substack{p/y \\ p > 5}} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right) \\ &\sim \frac{2 \cdot 2 \cdot 5}{1 \cdot 6} \frac{e^{-2C}}{\gamma^2 \log^2 y} \beta \sum_{q/y} \frac{1}{\psi(q)}. \end{aligned}$$

Zuletzt (d. h. für alle grossen y) ist also nach (28)

$$y^{\frac{1}{30}} \sigma \prod_{i=1}^t L_i < \varepsilon y^{\frac{1}{30}} \sigma \frac{2 \cdot 2 \cdot 5}{1 \cdot 6} \frac{e^{-2C}}{\gamma^2 \log^2 y} \beta \sum_{q/y} \frac{1}{\psi(q)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \varepsilon^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} \sigma \frac{e^{-2C}}{\gamma^2} \beta \frac{y}{\log^2 y} \sum_{q|y} \frac{1}{\psi(q)} \\
 &< \delta \beta \frac{y}{\log^2 y} \sum_{q|y} \frac{1}{\psi(q)}.
 \end{aligned}$$

Da $\zeta < \frac{1}{2}$ ist, langt es also nach (30), noch

$$\prod_{m=0}^{t-1} 2k_m = O(y^\zeta)$$

zu beweisen.

Nach (31) ist zuletzt

$$\frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}} e^{-C}}{\lambda} < \varepsilon \gamma \log y. \quad (32)$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)^2 &\leq 1 - \frac{v_s}{p_s} + \frac{1}{p_s^2} < \left(1 - \frac{v_s}{p_s}\right) \left(1 + \frac{2}{p_s^2}\right) \\
 &\quad \prod_p \left(1 + \frac{2}{p^2}\right)
 \end{aligned}$$

konvergiert; wird also für $1 \leq i \leq t$

$$M_i = \prod_{k_i < s \leq k_{i-1}} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$$

gesetzt, so ist für $1 \leq i \leq t - w_2$ zuletzt

$$M_i \leq \sqrt{\varepsilon \prod_{k_i < s \leq k_{i-1}} \left(1 - \frac{v_s}{p_s}\right)} = \sqrt{\varepsilon L_i} < \sqrt{\varepsilon \cdot \varepsilon e^{-\Theta}} = \varepsilon e^{-\frac{1}{2}\Theta}.$$

Wegen $p_{k_m} \geq 2k_m$ ist nach (26) und (32) für $0 \leq m \leq t - w_3$ zuletzt

$$\begin{aligned}
 \log(2k_m) &< \varepsilon^{\frac{1}{4}} e^{-C} \prod_{7 \leq p \leq 2k_m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \\
 &\leq \varepsilon^{\frac{1}{4}} e^{-C} \prod_{7 \leq p \leq p_{k_m}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \varepsilon^{\frac{1}{4}} e^{-C} \frac{1}{\lambda} \prod_{i=1}^m M_i \\
 &< \varepsilon^2 \gamma \log y (\varepsilon e^{-\frac{1}{2}\Theta})^m. \quad (33)
 \end{aligned}$$

y sei alsbald so groß, daß $t \geq w_3$.

Für $t - w_3 < m \leq t$ ist nach (33) zuletzt

$$\log(2k_m) < \log(2k_{t-w_3}) < \varepsilon^2 \gamma \log y (\varepsilon e^{-\frac{1}{2}\Theta})^{t-w_3};$$

zuletzt ist also

$$\sum_{m=t-w_s+1}^{t-1} \log(2k_m) < w_s \varepsilon^2 \gamma \log y (\varepsilon e^{-\frac{1}{2}\theta})^{t-w_s};$$

wegen (27) ist also zuletzt

$$\sum_{m=t-w_s+1}^{t-1} \log(2k_m) < (\varepsilon - 1) \log y. \quad (34)$$

Aus (29), (33) und (34) folgt zuletzt

$$\sum_{m=0}^{t-1} \log(2k_m) < \left(\varepsilon^2 \gamma \sum_{m=0}^{\infty} (\varepsilon e^{-\frac{1}{2}\theta})^m + \varepsilon - 1 \right) \log y = \zeta \log y,$$

$$\prod_{m=0}^{t-1} 2k_m < y^\zeta.$$

Satz 12: $\lim_{\substack{y \rightarrow \infty \\ y \equiv 0 \pmod{30}}} \frac{A(y)}{\log^2 y \sum_{q|y} \frac{1}{\psi(q)}} \leq 15\sigma e^{-2c} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{1}{2}\theta})^2} \beta.$

Beweis: Es sei

$$y > 0, \quad y \equiv 0 \pmod{30}.$$

Die Lösungszahl von

$$y = p + p', \quad p \leq \sqrt{y} \text{ oder } p' \leq \sqrt{y}$$

ist

$$\leq 2\sqrt{y}.$$

Die Lösungszahl von

$$y = p + p', \quad p > \sqrt{y}, \quad p' > \sqrt{y}$$

ist, da jedes p_s mit $7 \leq p_s \leq \sqrt{y}$ weder in p noch in $p - y = -p'$ aufgeht, und da in $p \equiv a \pmod{30}$ wegen $p > \sqrt{30} > 5$ sicher $(a, 30) = 1$ ist,

$$\leq \sum_{\substack{a=1 \\ (a, 30)=1}}^{30} F(30; p_1, \dots, p_k),$$

wo die $\varphi(30) = 8$ Glieder F sich auf das betreffende a beziehen.

Aus Satz 11 folgt also die Behauptung.

Zweiter Teil.

Numerische Rechnungen.

Hauptsatz: $S \leq 71.$

Beweis: Wir setzen

$$\Theta = 0,54.$$

Da die Goldbachsche Vermutung bis 1021 wahr ist, genügt es nach Satz 13, (1), (2) und

$$\frac{16}{3} \varrho \sigma(\Theta) e^{-2C} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2} < 34$$

zu beweisen.

Wir führten die folgenden Rechnungen ohne Benutzung logarithmischer oder anderer Tafeln aus.

Für unser Θ ist

$$\Theta^2 e^\Theta < 0,5004;$$

also gilt (2); (1) ist klar.

Demnach ist

$$\sigma(\Theta) < 1 + \Theta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{0,5004^m m^{2m}}{(2m+1)!}.$$

Indem wir für $m \geq 3$ die Abschätzung

$$\frac{m^{2m}}{(2m+1)!} < \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{4}e^2\right)^m \frac{1}{m^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{4\sqrt{3\pi}} \frac{(\frac{1}{4}e^2)^m}{m}$$

benutzen, finden wir

$$\sigma(\Theta) < 1,1174.$$

Andererseits ist

$$e^{\sum_{p \geq 13} \frac{1}{(p-1)^2}} < e^{\sum_{m=6}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2}} < e^{\frac{1}{8} \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 5^2}} = e^{\frac{1}{400}},$$

also

$$e < \left(1 + \frac{1}{6^3}\right) \left(1 + \frac{1}{10^3}\right) e^{\sum_{p \geq 13} \frac{1}{(p-1)^2}} < \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

ferner

$$C > 0,577,$$

$$e^{2C} > 3,17,$$

$$(1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2 > 0,0559,$$

also

$$34e^{2C} (1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2 > 6,009.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\frac{16}{3} \varrho \sigma(\Theta)}{34e^{2C} (1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2} < \frac{\frac{16}{3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1,1174}{6,009} < 1.$$

Cambridge, Berlin und Prag, den 14. Januar 1936.

*

Všechna velká čísla lze vyjádřit jako součet nejvýše 71 prvočísel.

(Obsah předešlého článku.)

Schnirelmann dokázal tuto větu: existuje číslo $c_1 > 0$ takové, že každé celé číslo $x > 1$ lze vyjádřit jako součet nejvýše c_1 prvočísel. Tuto větu lze vyslovit též takto: existují dvě kladná čísla c_2, c_3 tak, že každé celé číslo $x > c_2$ lze vyjádřit jako součet nejvýše c_3 prvočísel. Nejmenší takové číslo c_3 (k němuž existuje příslušné číslo c_2) označme znakem S .

Triviální je odhad zdola $S \geq 3$; o odhad shora pokusil se nedávno Romanov; tvrdí, že je $S \leq 1104$. Jeho práce obsahuje však — vedle tiskových a početních chyb — také jednu podstatnou závadu: Romanov uvádí totiž asymptotickou formuli o rozdělení prvočísel v aritmetických posloupnostech, při jejímž odvození se patrně dopustil chyby; neboť — ačkoliv Romanov tvrdí, že jeho formuli lze dokázat malou změnou Landauových úvah (Vorlesungen über Zahlentheorie, sv. 2) — nedovedeme do dneš roz rozhodnouti, je-li tato formule správná či nesprávná.

Na štěstí dá se tato pochybná formule obejít; a vskutku podaří se nám v této práci dokázat nejen nerovnost $S \leq 1104$, nýbrž dokonce ostřejší nerovnost $S \leq 71$. Zdůrazňujeme však výslovně, že práci Romanovově — přes všechny její vady — vděčíme za jednu z hlavních myšlenek této práce; vedle toho používáme ještě metod jedné Landauovy práce o Schnirelmannově větě a jednoho výsledku Chinčínova o jisté aditivní vlastnosti číselných množin.