Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Otakar Ježek

Příspěvek ku zkrácenému počítání. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 2, 58--63

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123282`

Užijeme-li při výpočtu zkráceného násobení, vyvineme vždy o 1 místo více a z toho vezmeme opravu.

17. *Druhou odmocninu* neúplného čísla lze ustanoviti na tolik spolehlivých míst, kolik připadá na polovinu mezné chyby relativní u daného odmocněnce.

Na př. $\sqrt{3{\cdot}1416}$ je spojena s meznou chybou relativní

$$\frac{5}{2 \times 300000} < \frac{1}{100000},$$

a vyjde tudíž na 5 spolehlivých míst, z nichž 3 vyvineme spůsobem obyčejným a 2 spůsobem zkráceným:

$$\begin{array}{l} \sqrt{3{\cdot}1416} = 1{\cdot}7724 \\ \quad 2\,1\underline{4} : 27 \\ \quad\;\; 251\underline{6} : 347 \\ \qquad\;\; 87 : 3\underline{54} \\ \qquad\;\; 16 \\ \qquad\;\;\; 2 \end{array}$$

K absolutní chybě ležící v daném čísle přistoupí pak ještě chyba spojená se zkráceným odmocňováním. Kterak se mezná hodnota této chyby ustanoví, o tom lze se poučiti z každé učebnice Algebry.

Podobně jest si počínati při odmocnině třetí. Vůbec z dosavadního patrno, že pravidla zde vyvinutá stačí úplně ve všech případech praktického počítání.

Příspěvek ku zkrácenému počítání.

Sepsal

Otakar Ježek,

s. professor real. gymnasia na Smíchově.

(Dokončení.)

III.

Řešme nyní obdobnou úlohu pro třetí mocnosť, t. j. „stanovme trojmoc nekonečného desetinného čísla

$$\pi = 3{,}14159263589793238 46\ldots$$

na 0,00001 nadbytkem nebo nedostatkem přesně.“

Počet míst, jež jest nám voliti v čísle daném stanovme tímto pravidlem:

„Chceme-li obdržeti v trojmoci daného čísla m cifer přesných, stačí voliti z onoho čísla buď $(m+1)$ nebo $(m+2)$ cifer dle toho, je-li v daném čísle na nejvyšším místě číslo větší dvojky čili nic.“

By totiž měl výsledek m cifer správných, stačí jeho chybu relativní snížiti pod $\frac{1}{10^m}$ a dopustiti se tedy v daném čísle relativní chyby nejvýše $\frac{1}{3.10^m}$; tomu však stanovené pravidlo hoví. V našem případě nutno tudíž opět vzíti

$$\pi = 3{,}141592.$$

Stanovíme zase nejprve úplnou trojmoc čísla 3,141592, bychom objasnili některé výhody, které i zde zavésti lze; z výsledku pak vezmeme pouze tolik cifer, bychom obdrželi π^3 na 0,00001 přesně nadbytkem i nedostatkem, čímž zároveň nabudeme kontroly pro výsledek zkráceného počítání.

Uvážíme-li, že Euler ve svém spisu: „Vollständige Anleitung zur Algebra“ počítání třetí mocnosti čísla dekadického *) tím zjednodušuje, že stanoviv a^3, ihned další dva členy dle formule $3ab\ (a+b)$ násobením určuje a konečně b^3 připojuje, snadno seznáme, že lze ještě pohodlněji takto pokračovati:

Stanovíme všechny součiny $ab\ (a+b)$, při čemž částečný součin každého nového násobení o tři místa dál na levo pod první částečný součin předešlého násobení píšeme. Součet všech těchto součinů násobme třiceti, a oddělme ve výsledku $3n$ míst desetinných, jest-liže jich dané číslo mělo n.

K tomu součtu přičtěme číslo utvořené tím způsobem, že trojmoci všech cifer daného čísla položíme vedle sebe v témž pořadu, v jakém cifry v daném čísle za sebou jdou, při čemž za trojmoc čísel 0, 1, 2, 3, 4, dlužno bráti čísla 000, 001, 008, 027, 064.

Mají-li celky daného čísla k cifer, budou jich celky právě

---

*) O témž předmětu pojednává v lonském ročníku tohoto časopisu prof. Kašpr ve článku: „Jak lze najíti třetí mocninu a odmocninu čísel dekadických.“

stanoveného čísla míti $3k$, při čemž arci po případě nejvyšším místem neb i dvěma nejvyššími čísly v levo budou nuly.

Konečně budiž opět poznamenáno, že při krátkém cviku zmíněné sečítání částečných součinů a násobení součtu třemi v jednom provésti lze. Bude tudíž výpočet v našem případě následující: *)

$3{,}141592^3 =$	25132736	3141592×628318
	3141592	
	9424776	
	25132736	
	6283184	
	18849552	
	1570795	314159×282735
	942477	
	2199113	
	628318	
	2513272	
	628318	
	157075	31415×15705
	219905	
	157075	
	31415	
	12564	3141×314
	3141	
	9423	
	1256	314×124
	628	
	314	
	93	31×3
	4,005193327160017 68	
	27,001064001125729008	
	31,006257328285746688	

*) V pravo naznačené součiny jsou patrně součiny $ab\,(a+b)$; první násobenec jest celé číslo 3141592, násobitele však ohdržíme jako součin 3141592×2; druhý násobenec jest o jednu cifru v pravo menší, tedy 314159, jeho násobitelem jest pak 31415×9 a t. d.

Na 0,00001 přesně nadbytkem bude tedy $\pi^3 = 31{,}00626$, nedostatkem pak 31,00625.

Poznámka. Pro zkrácené počítání třetí mocnosti čísel desetinných**) jest důležito podotknouti, že bylo možno při nezkráceném počítání tím způsobem postupovati, že hned v prvním násobenci se vytkne $(3n - 1)$ míst desetinných,**) násobitel pak jako dříve stanovený zůstane celistvým. Druhý násobenec stanoví se z předešlého, když poslední místo v pravo vypustíme a zároveň desetinnou tečku o dvě místa posuneme na pravo; příslušný násobitel jest opět celistvým. Pokračujeme-li tímto způsobem máme po sečtení ve výsledku ihned žádaných $(3n - 1)$ desetinných míst.

Jest-liže bychom měli stanoviti π^3 na 0,00001 přesně zkráceným počtem, nahradíme opět π neúplným desetinným zlomkem 3,141592, a napíšeme nyní pod prvního násobence dle předešlé poznámky utvořeného, t. j. 0,00000000003141592 příslušného násobitele 813826 tak, by vyšlo číslo řadové hodnoty tisíckráte menší než jest žádaná, při dalším pak násobení stačí pod číslo 314159 napsati příslušného násobence 31415×9 tak, by jeho jednotky proti jednotkám předešlého násobitele stály o dvě místa dál na pravo. Tím způsobem pak pokračujeme. K součtu všech částečných součinů násobenému třemi přidáme z čísla utvořeného položením trojmocí čísla π vedle sebe tolik, kolik jich zkrácený počet žádá.

---

*) Případ zkráceného mocnění čísel celistvých neprobírám, ježto nemá praktického významu.

**) Jak patrno, jest v součtu všech částečných součinů pouze $(3n - 1)$ skutečných desetinných míst. Pravidlo o počtu míst bylo však z ohledu na čísla celistvá vysloveno ve formě dříve uvedené.

Bude tudíž počet takto upraven:

$3{,}141592^3$	0,00000 00 0003141592
1884	813826
62	
24	
62330	314159
25128	537282
628	
217	
9	
31415	31415
157075	50751
21987	
155	
9423	3141 *)
3141	413
12564	
314	314..
628	421
1256	
93	31.....
4,00519269	3
31,00625669	

Chyby, jichž jsme se v jednotlivých násobeních dopustili jsou, jak z úvah o zkráceném násobení plyne, menší než

$$6+2+8+4;\quad 2+8+2+7+3+4;\quad 5+7+5,$$

stomilionín, jest tedy celková chyba třetí mocnosti

$$(6+2+8+4+2+8+2+7+3+4+5+7+5)3+1=190.$$

Jednotka mimo závorku vztahuje se patrně ku chybě pocházející ze zanedbání cifer, jež v čísle utvořeném z trojmocí daných čísel sledují za trojmocí čísla 4. Kdyby bylo číslo 3,141592 úplným desetinným zlomkem, stačilo by opět potlačiti poslední tři cifry výsledku a zvětšiti předcházející o jednu jednotku, bychom byli jisti, že výsledek jest třetí mocnosť daného čísla na 0,00001 přesně, buď nadbytkem nebo nedostatkem; v našem případě však musíme z důvodů obdobných jako v předešlém

*) Toto i další dvě násobení jest jak patrno nezkrácené.

odstavci chybu přičísti, a místo čísla takto stanoveného t. j. 31,00625759 vzíti číslo 31,00626, bychom byli jisti, že toto jest buď nadbytkem nebo nedostatkem na 0,000001 přesně stanovenou třetí mocností čísla π.

Poznámka. Kdyby chyba, již opět předem stanoviti lze, byla $>$ než 1000 desítimilionin, musili bychom psáti jednotky prvého násobitele pod příslušného násobence tak, aby vyšly jednotky řádu 10000 $<$ než jest žádaný.

Několik analytických studií o plochách mimosměrek (zborcených).

Podává

Vilém Jung,

s. professor při státní průmyslové škole v Brně.

(Pokračování.)

5. *Na plochách mimosměrek 2-ho stupně vyskytují se dvě soustavy povrchových přímek. Přímky téže soustavy jsou vespolek mimosměrny, kdežto přímky různých soustav se protínají.*

Plocha mimosměrek 2-ho stupně jest dána rovnicemi:

$$\left.\begin{aligned} A + tB &= 0 \\ a + tb &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{aligned} A &= A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_4 , \\ B &= B_1 x + B_2 y + B_3 z + B_4 , \\ a &= a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 , \\ b &= b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 . \end{aligned}$$

A_k, B_k, a_k, b_k jsou konstanty, t proměnný parametr.

Vyloučením parametru t ze soustavy (I) plyne rovnice ohledně x, y, z 2-ho stupně, totiž

$$\begin{vmatrix} A & B \\ a & b \end{vmatrix} = 0,$$

jakožto rovnice plochy mimosměrek 2-ho stupně.

Znamenáme-li

$$\begin{vmatrix} A_k & B_i \\ a_k & b_i \end{vmatrix} = \varrho_{ki},$$

zní tato rovnice ve tvaru rozvinutém: