Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Sobotka

Poznámky k centrálnému promítání koule

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 2, 117--122

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123295

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1904

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Poznámky k centrálnému promítání koule.

Napsal

Jan Sobotka,
v. ř. professor české vysoké školy technické v Brně.

1. Konstrukce této nadmíru jednoduché úlohy provádí se často způsobem nepřiměřeně složitým. Velmi jednoduchá řešení nalezáme na př. v známých dílech, která napsali Chr. Wiener a Rohn-Papperitz. Řešení ta provedena jsou však přechodem k orthogonalným průmětům sdruženým a předpokládají mimo to, že lze celou distanci vyjádřiti v mezích nákresny. Z jiného hlediska řeší úlohu tu M. d'Ocagne v Nouvelles annales de mathématiques 1898 uvažuje případ, když průmětem koule jest ellipsa. Pojednání to mi dalo podnět k následujícím poznámkám.

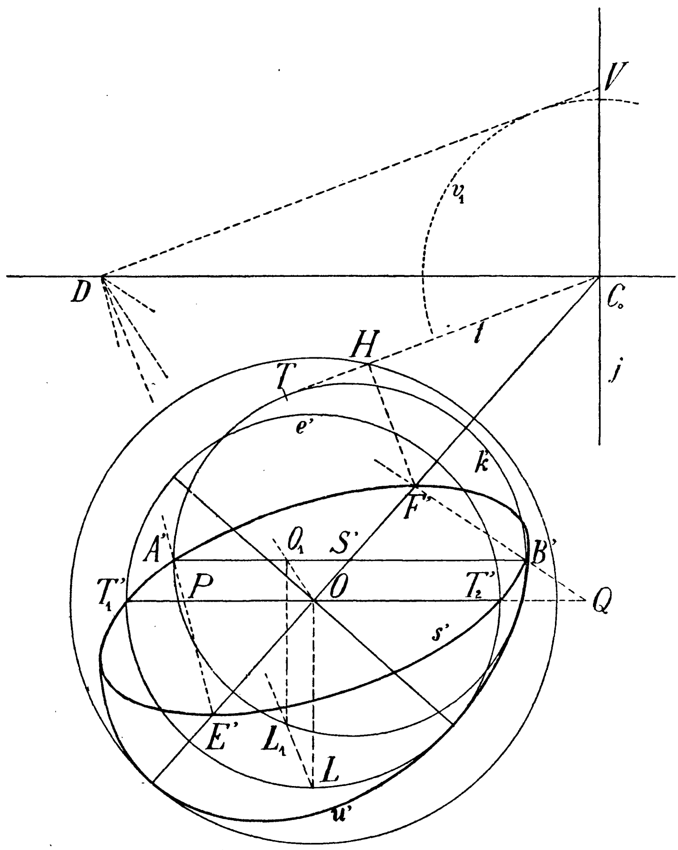
Sestrojíme nejprve známým způsobem průmět k' oné kružnice největší k na kouli dané, která leží v rovině rovnoběžné s průmětnou. Nechť značí S střed koule. Průmět její jest totožný s průmětem koule K mající svůj střed v průmětu S' bodu S a protínající průmětnu v k'; můžeme proto v dalším postupu zabývati se pouze koulí K. Označme r poloměr kružnice k' a tedy i koule K.

Na to sestrojíme průmět $E'F'$ průměru EF koule K kolmého k průmětně. Ten leží na přímce spojující bod S' se středem C_0 průmětny, orthogonalným to průmětem středu promítání C. Rovná-li se úsečka C_0D v průmětně distanci d, vedeme v k' průměr $A'B'$ rovnoběžný s C_0D. Jelikož D jest bodem dělícím pro přímku $n \equiv EF$, proto protnou přímky DA', DB' přímku $S'C_0$ v bodech E', F'.

Nelze-li d vyjádřiti v mezích nákresny zvolíme místo D bod D_λ tak, aby $C_0 D_\lambda = \dfrac{d}{\lambda}$ a ustanovíme na $A'B'$ body A_λ, B^λ

tak, aby $A_\lambda S' = S'B_\lambda = \frac{r}{\lambda}$; přímky $D_\lambda A_\lambda$, $D_\lambda B_\lambda$ protínají $S'C_0$ opět v bodech E', F'.

Jak známo, jsou dle věty Quetelet-Daudelinovy průměty E', F' ohnisky pro hledaný obrys u' plochy K a tedy i koule dané, a střed O úsečky $E'F'$ jest středem obrysu u'.



Pro $d > r$ jest u' ellipsou, pro $d < r$ hyperbolou a pro $d = r$, v kterémžto případě jeden z bodů E', F', řekneme první padne do nekonečna, jest u' parabolou.

2. Křivku u na kouli K, která se promítá do u', lze s křiv-

kou k' spojiti dvěma kuželi 2. stupně, jejichž středy leží na přímce CC_0. Z toho plyne, že k', u' jsou v centrické kollineaci pro C_0 jakožto střed a pro průsek roviny, v níž leží kružnice u, s průmětnou, to jest pro poláru c bodu C_0 vzhledem ku k', jakožto osu kollineace; kuželosečky k', u' se tudíž na ose kollineační dvakráte dotýkají.

Rozeznávejme nyní tři případy podle toho, jakou polohu má C_0 vzhledem ku k'.

Leží-li C_0 vně kružnice k' (viz obr.), lze z bodu toho vésti realné tečny ku k' a ty jsou zároveň tečnami ku u'; neboť ony jsou obrysem válce, který se plochy K dotýká podél k'. Je-li tudíž t jedna z tečen těch a H pata kolmice z jednoho z bodů E', F' k ní spuštěné, jest OH délka hlavní poloosy pro kuželosečku u', čímž tato jest stanovena.

Konstrukce ta platí stejnou měrou ať jest u' ellipsou neb hyperbolou; je-li u' parabolou, náleží bod H její tečně vrcholové.

Když jest u' ellipsou a T bod dotyku přímky t s k' a tedy i s u', pak dle známé konstrukce prochází kružnice h, bodem tím vedená a mající svůj střed ve středu úsečky OS', jejími vrcholy vedlejšími.

Leží-li bod C_0 na kružnici k', tu jest zároveň již jedním vrcholem hlavním pro kuželosečku u' a k' jest její kružnicí křivosti vrcholu tomu příslušnou.

Leží-li bod C_0 uvnitř kružnice k' a označíme-li C_1 průsek přímky c s $S'C_0$, jsou body C_0, C_1 vzhledem k u' sdruženy a proto jest pro poloosu hlavní a kuželosečky u' platná relace $a^2 = \overline{OC_0} \cdot \overline{OC_1}$, z níž a sestrojíme.

To předpokládá, že u' jest buď ellipsou nebo hyperbolou; je-li ale u' parabolou, pak víme, že tečna vrcholová jest symmetrálou bodů C_0, C_1.

Je-li u' hyperbolou, protíná kružnice nad průměrem OS' opsaná přímku c v bodech M, N náležejících jejím asymptotám OM, ON, čímž tyto lze direktně sestrojiti. Správnost konstrukce této vysvítá z toho, že poláry libovolného bodu vzhledem ke kuželosečkám u', k' protínají se na c. Asymptota jest vzhledem k u' polárou svého nekonečně vzdáleného bodu, jehož polárou vzhledem ku k' jest průměr kružnice této kolmý k asymptotě.

Mimo to budiž podotknuto, že délka tečen z M nebo N ku k' vedených, jak známo, rovná se délce poloosy vedlejší pro hyperbolu u'.

3. Můžeme ale též bezprostředně sestrojiti délku b poloosy vedlejší pro kuželosečku u', je-li ellipsou neb hyperbolou.

Mysleme si za tím účelem průměr n kolmý k průmětně protnutý v bodě R rovinou centrálnou; pak protínají roviny tečné koule K položené přímkou CR průmětnu v tečnách kuželosečky u' rovnoběžných s osou hlavní. Vzdálenost tečen těch od $E'F'$, tedy b, rovná se též poloměru kružnice stopní v pro kužel R o vrcholi R opsaný kouli K.

Je-li u' ellipsou, jest kružnice v realná. Opíšeme-li tu (viz obr.) na př. kolem C_0 kružnici v_1 poloměru r a vedeme z D tečnu ku v_1 protínající kolmici j v C_0 ku $C_0 D$ vztýčenou v bodě V, jest patrně $b = C_0 V$, čímž ellipsa u' je stanovena. Nahradíme-li bod D bodem D_λ, tedy v_1 kružnicí soustřednou poloměru $\frac{r}{\lambda}$, obdržíme na j místo bodu V bod V_λ a $b = \lambda \,.\, \overline{C_0 V_\lambda}$.

Když jest u' hyperbolou, tu konstrukce příslušná není vzhledem k dosavadním konstrukcím dosti jednoduchá. Konstrukce ta jest totiž následující. Involuce sdružených paprsků vzhledem ku v_1 procházejících bodem D protíná j v involuci bodové, v níž prvky symmetrického páru mají od C_0 vzdálenost b. Znamená-li tedy d_1 poláru bodu D vzhledem ku v_1, D_1 bod její průsečný s přímkou $C_0 D$ a spojíme-li jeden z bodů, v němž d_1 protíná kružnici středu D_1 a ku v_1 orthogonalnou s bodem D, protne spojnice přímku j v bodě V tak, že $b = \overline{C_0 V}$.

4. Kužel R můžeme též sestrojiti tím, že vedeme z R tečny ku křivkám kruhovým na kouli K, které obsaženy jsou v rovinách položených přímkou n.

Budiž (viz obr.) s libovolná taková křivka, s' její průmět; s obsahuje EF jakožto průměr, jenž se promítá v průměr $E'F'$ křivky s'. Tečny t_1, t_2 z R ku s promítají se ve dvě ku $E'F'$ stejnosměrné tečny t'_1, t'_2 křivky s'. Proto promítají se body dotyku T_1, T_2 tečen t_1, t_2 do koncových bodů T'_1, T'_2 průměru křivky s' ku $E'F'$ sdruženého. Js tudíž křivka s' s obrysem u' soustředná.

Body T_1, T_2 leží na kružnici e, podél níž se kužel R koule K dotýká. Průmět e' kružnice této obsahuje tedy body T_1', T_2' a jest to kružnice s v stejná a s s' tedy i u' soustředná, z čehož plyne, že $OT_1' = OT_2' = b$. Křivka s' je též průmětem křivky kruhové na kouli původně dané a v rovině křivky s ležící. Tím dospíváme k následující větě:

Obrys u' koule jest úplně stanoven průmětem s' kterékoliv její křivky kruhové největší, ležící v rovině normalné k průmětně; jkoncové body průměru křivky s' směřujícího ke středu průmětny, jsou ohnisky a délka průměru k němu sdruženého jest délkou osy vedlejší pro obrys u'; hlavní kružnice vrcholová kuželosečky u' est geometrickým místem bodů, z nichž tečny ku s' vedené jsou k sobě kolmy.

Křivky u', s' jsou tedy vždy téhož druhu.

Tím je též způsobem co nejjednodušším dáno *zobrazení polokoule*, která omezena jest kružnicí položenou v rovině normalné k průmětně.

Křivky u', s' se dotýkají ve dvou bodech, v nichž společné přímky tečné jsou kolmé ku stopě roviny křivku s obsahující; tyto tečny jsou obrysem plochy válcové, dotýkající se koule K podél křivky s.

Přímka bodem O rovnoběžně ku $A'B'$ vedená (viz obr.), budiž protnuta přímkou $E'A'$ v bodě P, přímkou $F'B'$ v bodě Q; myslíme-li si bod P_1 tak, že co do délky i co do směru a smyslu $P_1O = OP$, tu jsou body P_1, Q sdruženy vzhledem ku s'; proto jest bez zřetele na znaménko $\overline{OP} \,.\, \overline{OQ} = b^2$.

Na základě relace té lze opětně délku b sestrojiti.

5. Je-li zvlášť pak u' ellipsou a lze-li bod D pro $C_0 D = d$ vystihnouti v mezích nákresny, tu se provede konstrukce následovně.

Spojíme D s O a spojnici protneme přímkou $A'B'$ v bodě O_1. (viz obr.) Body O, O_1 vedeme kolmice ku $A'B'$; druhou z nich protneme kružnicí k' v bodě L_1, kdežto prvou protneme přímkou DL_1 v bodě L. Jest pak $b = OL$.

Je-li u' a tedy i s' parabolou, mají obě rovnoběžné osy. Tečny C_0B', $F'1$ paraboly s', z nichž první se jí dotýká v B', druhá v F', jsouc rovnoběžná ku $A'B'$, nechť se protínají v bodě 1

Abychom odvodili u' z s' jakož i souvislost obou parabol, sestrojme jejich společnou tečnu g kolmou ku $A'B'$.

Tečnu tu sestrojíme jakožto tečnu ku s' na základě věty Brianchonovy na př. tím, že protneme kolmici v 1 ku $A'B'$ vztýčenou přímkou $S'C_0$ v bodě 2, jímž vedeme rovnoběžku ku C_0B' až protne $F'1$ v bodě G; bod tento leží již na tečně g. Poněvadž jest $g \perp F'G$, proto náleží bod G přímce řídící křivky s' a tečně vrcholové křivky u'.

Jest tedy tečna vrcholová obrysu u' zároveň přímkou řídící křivky s'. Vrchol paraboly u' a ohnisko paraboly s' leží souměrně vzhledem ku přímce $F'1$.

Poznámka k theorii dělitelnosti.

Podává

Gustav Gruss,
professor české university v Praze.

Jsou-li $f(z)$ a $f_1(z)$ dvě celistvé funkce veličiny z a to $f(z)$ stupně n-tého, $f_1(z)$ stupně m-tého $(n > m)$, jest

$$
(a)\qquad
\begin{aligned}
f(z) &= f_1(z)g_1(z) + f_2(z)\\
f_1(z) &= f_2(z)g_2(z) + f_3(z)\\
&\vdots\\
f_{r-1}(z) &= f_r(z)g_r(z).
\end{aligned}
$$

Z této soustavy rovnic plyne, že $f(z)$ i $f_1(z)$ jest dělitelno $f_r(z)$, že tedy $f_r(z)$ jest největší společný dělitel dvou funkcí $f(z)$ a $f_1(z)$.

Jsou-li $f(z)$ a $f_1(z)$ *nesoudělné*, t. j. nemají-li žádného společného dělitele $f_r(z)$, jehož stupeň jest vyšší než nulltý, plyne

$$(1)\qquad f(z) = f_1(z)g_1(z) + f_2(z), \quad f_2(z) = 1$$

aneb

$$f(z) - 1 = f_1(z)g_1(z).$$

Dosadíme-li sem za

$$z = 0.$$